Einführung in die Theoretische Informatik I/ Grundlagen der The oretischen Informatik

SS 2007

Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

2. Teilklausur

11.06.2007

Persönliche Daten — bitte gut leserlich ausfüllen!

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikelnummer: ....

Klausurergebnis — bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe 1: .... (12 Punkte)

Aufgabe 2: .... (6 Punkte)

Aufgabe 3: .... (6 Punkte)

Aufgabe 4: .... (6 Punkte)

Gesamtergebnis: ....

Note: ....

1 Multiple Choice (5+3+4 = 12 Punkte)

Hinweis:
Bei den folgenden Ankreuzaufgaben führen falsche Kreuze zu Punktabzug!
Dabei werden insgesamt jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für die jeweilige Teilaufgabe vergeben.

(a) Sprachen und Grammatiken (5 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Für jede Sprache L gilt: L^+ enthält *nicht* das leere Wort	richtig ☐ falsch ☒
Die Grammatik, deren Regelmenge als einzige Regel $$S \to \varepsilon$$ enthält, erzeugt dieselbe Sprache wie die Grammatik mit leerer Regelmenge.	richtig ☐ falsch ☒
Um zu beweisen, dass eine Sprache L *nicht* regulär ist, genügt es, eine kontextfreie Grammatik für L anzugeben.	richtig ☐ falsch ☒
Um zu beweisen, dass eine Sprache L *nicht* regulär ist, genügt es, zu zeigen, dass das $\mathcal{L}_3$-Pumping-Lemma für L nicht gilt.	richtig ☒ falsch ☐
Immer wenn es in einer kontextfreien Grammatik zu einer Variablen A keine Regel gibt, auf deren linker Seite A steht (die also die Form $A \to \ldots$ hat), dann ist A nicht co-erreichbar und damit nutzlos.	richtig ☒ falsch ☐

(b) Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Wenn eine Sprache L regulär ist, dann ist ihr Komplement $\overline{L} = (\Sigma^* \setminus L)$ regulär.	☒	☐
Wenn die Sprachen L_1 und L_2 regulär sind, dann ist die Sprache $L_1 \cap L_2$ regulär.	☒	☐
Wenn eine Sprache L regulär ist, dann ist jede Sprache $L' \subset L$ regulär.	☐	☒

(c) Ableitungsbäume (4 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik. Zu jeder Ableitung mit den Regeln der Grammatik gibt es genau einen entsprechenden Ableitungsbaum.	☒	☐
Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik. Zu jedem Ableitungsbaum gibt es genau eine entsprechende Ableitung mit den Regeln der Grammatik.	☐	☒
Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik. Zu jedem in der Grammatik ableitbaren Wort gibt es (mindestens) einen entsprechenden Ableitungsbaum.	☒	☐
Aus einem Ableitungsbaum kann man eine Linksableitung ablesen.	☒	☐

2 Automaten + reguläre Ausdrücke (2+2+2 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für folgende Sprache an:

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält höchstens ein } a\}$$

Lösung:

$$b^*ab^* + b^*$$

oder auch

$$b^*(a+1)b^*$$

(b) Geben Sie einen endlichen Automaten mit ε-Kanten für die Sprache

$$L \;=\; \Im(\,(a+bc)(ca)^*\,)$$

an.

Lösung:

(c) Geben Sie einen endlichen Automaten mit ε-Kanten für die Sprache

$$L^* \;=\; \Im(\,(\,(a+bc)(ca)^*\,)^*\,)$$

an.

Lösung:

3 Pumping-Lemma für reguläre Sprachen (3+3 = 6 Punkte)

(a) Wie lautet das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen? Ergänzen Sie den folgenden Lückentext an den punktierten Linien.

Hinweis: Es ist egal, welche der beiden Varianten aus der Vorlesung Sie angeben.

Lemma (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen).

Sei L eine reguläre Sprache.

Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass:

für alle Wörter $x \in L$ mit $|x| \geq n$

existiert eine Zerlegung, d. h.,

es gibt Wörter u, v, w mit $x = uvw$ und $1 \leq |v| < n$

so dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $uv^m w \in L$

.

Lösung:
Alternativ können statt der Bedingung $1 \leq |v| < n$ die Bedingungen $1 \leq |uv| < n$ und $1 \leq |v|$ verwendet werden.

(b) Gegeben sei die Sprache

$$L = \Im(\,aab^*\,)$$

i. Wie groß muss für diese Sprache L das n aus dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen mindestens sein, damit das Lemma gilt (damit also alle Wörter, die mindestens die Länge n haben, gepumpt werden können)?

$$n \geq 3$$

ii. Geben Sie ein Wort aus L an, das so kurz ist, dass es *nicht* beliebig gepumpt werden kann.

Lösung:

Das Wort aa ist Element von L, seine Länge ist kleiner als 3, und es kann nicht gepumpt werden.

4 Kontextfreie Grammatiken (3+3 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$\{a^m b^n a^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$$

an.

Hinweis: Es ist hilfreich, zu berücksichtigen, dass $a^m b^n a^{m+n} = a^m b^n a^n a^m$

Lösung:

$G = (\{S, T\}, \{a, b\}, R, S)$ mit folgenden Regeln in R:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSa \mid T \\ T & \rightarrow & bTa \mid \varepsilon \end{array}$$

(b) Eine kontextfreie Grammatik enthalte (u. a.) folgende Regeln:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & BaCd \\ B & \rightarrow & \varepsilon \mid \ldots \\ C & \rightarrow & \varepsilon \mid \ldots \end{array}$$

Welche Regeln mit A auf der linken Seite kommen hinzu, wenn die nullbaren Symbole B und C gemäß dem in der Vorlesung angegebenen Algorithmus eliminiert werden?

Lösung:

$$A \rightarrow aCd \mid Bad \mid ad$$