UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Einführung in die Theoretische Informatik I/ Grundlagen der Theoretischen Informatik

SS 2007

Jun.-Prof. Dr. Bernhard Beckert
Ulrich Koch

Nachklausur

25. 09. 2007

Persönliche Daten — bitte gut leserlich ausfüllen!

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikelnummer: ....

Klausurergebnis — bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe 1:	....	(38 Punkte)
Aufgabe 2:	....	(6 Punkte)
Aufgabe 3:	....	(11 Punkte)
Aufgabe 4:	....	(5 Punkte)
Aufgabe 5:	....	(6 Punkte)
Aufgabe 6:	....	(6 Punkte)
Aufgabe 7:	....	(5 Punkte)
Aufgabe 8:	....	(2 Punkte)
Aufgabe 9:	....	(6 Punkte)
Aufgabe 10:	....	(5 Punkte)

Gesamtergebnis: ....

Note: ....

1 Multiple Choice (4+3+3+3+3+3+2+5+3+5+3 = 38 Punkte)

Hinweis:
Bei den folgenden Ankreuzaufgaben führen falsche Kreuze zu Punktabzug!
Dabei werden insgesamt jedoch keinesfalls weniger als 0 Punkte für die jeweilige Teilaufgabe vergeben.

(a) Logik (5 Punkte)

i. Kreuzen Sie zu den drei folgenden natürlichsprachlichen Sätzen jeweils diejenige prädikatenlogische Formel an, die die <u>bessere</u> Formalisierung des Satzes ist.

Es gibt einen Studenten, der nicht schlau ist.	
$\exists s(\text{student}(s) \wedge \neg\text{schlau}(s))$	☒
$\exists s(\text{student}(s) \Rightarrow \neg\text{schlau}(s))$	☐

Der Barbier rasiert genau diejenigen, die sich nicht selbst rasieren.	
$\exists x(\neg\text{rasiert}(x,x) \Rightarrow \text{rasiert}(\text{barbier},x))$	☐
$\forall x(\text{rasiert}(\text{barbier},x) \Leftrightarrow \neg\text{rasiert}(x,x))$	☒
$\forall x(\text{rasiert}(\text{barbier},x) \wedge \neg\text{rasiert}(x,x))$	☐

ii. Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

$\forall x(p(x)) \Leftrightarrow \neg\exists x(p(x))$ ist allgemeingültig.	richtig ☐ falsch ☒
$\exists x(p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow \exists x(p(x))$ ist allgemeingültig.	richtig ☒ falsch ☐

(b) Abzählbarkeit (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Eine Menge ist genau dann abzählbar, wenn sie rekursiv aufzählbar ist.	richtig ☐ falsch ☒
Keine unendliche Menge ist abzählbar.	richtig ☐ falsch ☒
Die Menge aller Sprachen ist überabzählbar.	richtig ☒ falsch ☐

(c) Sprachen und Grammatiken (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Es gibt Sprachen L, für die $$LL = L$$ gilt.	richtig ☒ falsch ☐
$\emptyset^* = \{\varepsilon\}$	richtig ☒ falsch ☐
Zu jeder beschränkten Grammatik gibt es eine äquivalente kontextsensitive Grammatik.	richtig ☒ falsch ☐

(d) Reguläre Sprachen und rechtslineare Grammatiken (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Jede endliche Sprache ist regulär.	richtig ☒ falsch ☐
Es gibt kontextfreie Grammatiken, die reguläre Sprachen erzeugen.	richtig ☒ falsch ☐
Um zu beweisen, dass eine Sprache L regulär ist, genügt es, zu zeigen, dass das $\mathcal{L}_3$-Pumping-Lemma für L gilt.	richtig ☐ falsch ☒

(e) Endliche Automaten und reguläre Ausdrücke (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird von einem indeterminierten endlichen Automaten $$A = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$ akzeptiert, wenn $$\exists s \in I\ \exists f \in F\ (((s, w), f) \in \Delta^*)$$	richtig ☒ falsch ☐
$\Im((a + b)^*) = \Im(a^* + b^*)$	richtig ☐ falsch ☒
$\Im(a(b + c)) = \Im(ab + ac)$	richtig ☒ falsch ☐

(f) Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Wenn die Sprachen L_1 und L_2 regulär sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.	richtig ☒ falsch ☐
Wenn eine Sprache L regulär ist, dann ist auch L^* regulär.	richtig ☒ falsch ☐
Wenn eine Sprache L *nicht* regulär ist, dann ist L^* *nicht* regulär.	richtig ☐ falsch ☒

(g) Ableitungsbäume (2 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Es gibt kontextfreie Grammatiken G, so dass es mehr als einen Ableitungsbaum für die Ableitung desselben Wortes w in G gibt.	richtig ☒ falsch ☐
Gegeben sei eine kontextfreie Grammatik. Dann gibt es zu jedem *Ableitungsbaum* genau eine Linksableitung.	richtig ☒ falsch ☐

(h) Kontextfreie Sprachen und PDAs (5 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

Alle kontextfreien Sprachen sind Dyck-Sprachen.	richtig ☐ falsch ☒
Wenn es einen Push-down-Automaten (PDA) gibt, der eine Sprache L *per Endzustand* erkennt, dann gibt es auch einen Push-down-Automaten, der L *per leerem Keller* erkennt.	richtig ☒ falsch ☐
Wenn L_1 und L_2 kontextfrei sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ kontextfrei.	richtig ☒ falsch ☐
Wenn L_1 und L_2 kontextfrei sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ kontextfrei.	richtig ☐ falsch ☒
Wenn L kontextfrei ist, dann ist auch L^* kontextfrei.	richtig ☒ falsch ☐

(i) Turing-Maschinen (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Jede universelle Turing-Maschine kann sich selbst simulieren.	☒	☐
Turing-Maschinen mit mehreren Bändern sind mächtiger als Turing-Maschinen mit einem Band.	☐	☒
Determinierte und indeterminierte Turing-Maschinen sind gleichmächtig.	☒	☐

(j) Entscheidbarkeit (5 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Jede entscheidbare Sprache ist akzeptierbar.	☒	☐
Das Komplement jeder rekursiv aufzählbaren Sprache ist rekursiv aufzählbar.	☐	☒
Jede endliche Sprache ist akzeptierbar.	☒	☐
Jede unentscheidbare Sprache ist unendlich.	☒	☐
Es gibt eine Turing-Maschine, die für alle Java-Programme P entscheiden kann, ob P, wenn man es laufen lässt, eine `NullPointerException` werfen wird.	☐	☒

(k) Komplexität (3 Punkte)

Entscheiden Sie durch Ankreuzen, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	richtig	falsch
Es ist bekannt und einfach zu beweisen, dass $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.	☐	☒
Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist **NP**-hart.	☒	☐
Jedes **NP**-harte Problem liegt in **NP**.	☐	☒

2 Sprachen und Grammatiken (3+3 = 6 Punkte)

Geben Sie für jede der beiden folgenden Grammatiken an, welche Sprache von der Grammatik erzeugt wird.

(a) $G_1 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, R, S)$ mit folgenden Regeln in R:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & aA \mid B \mid C \\ A & \rightarrow & Sd \\ B & \rightarrow & bBc \mid \varepsilon \\ C & \rightarrow & B \end{array}$$

Lösung:

$$L(G_1) = \{a^m b^n c^n d^m \mid m, n \in \mathbb{N}_0\}$$

(Die Regeln $S \rightarrow C$ und $C \rightarrow B$ sind wegen $S \rightarrow B$ redundant.)

(b) $G_2 = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, R, S)$ mit folgenden Regeln in R:

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \\ aB & \rightarrow & b \\ bB & \rightarrow & c \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rcl} L(G_2) & = & \{a^n b \mid n \in \mathbb{N}_0\} \\ & = & \Im(a^* b) \end{array}$$

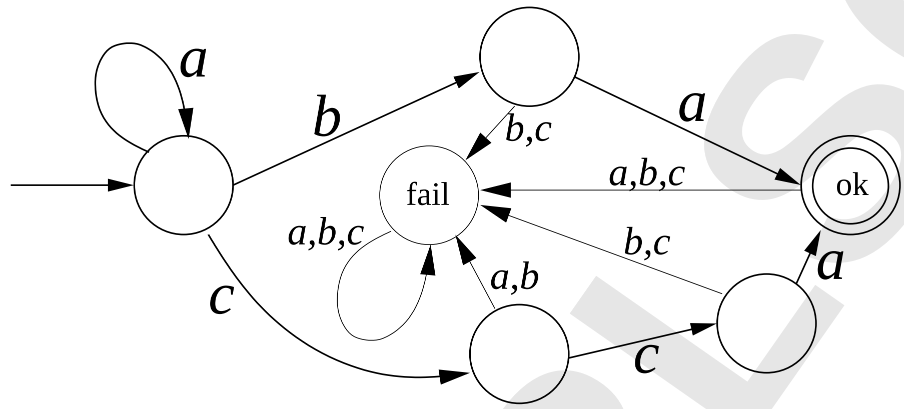
(Vom Startsymbol aus können keine Wörter abgeleitet werden, in denen bB vorkommt. Darum ist die Regel $bB \rightarrow c$ redundant.)

3 Endliche Automaten (3+2+4+2 = 11 Punkte)

(a) Geben Sie einen <u>determinierten</u> endlichen Automaten an für die Sprache

$$\Im(\ a^*(b + cc)a\ )$$

<u>**Lösung:**</u>

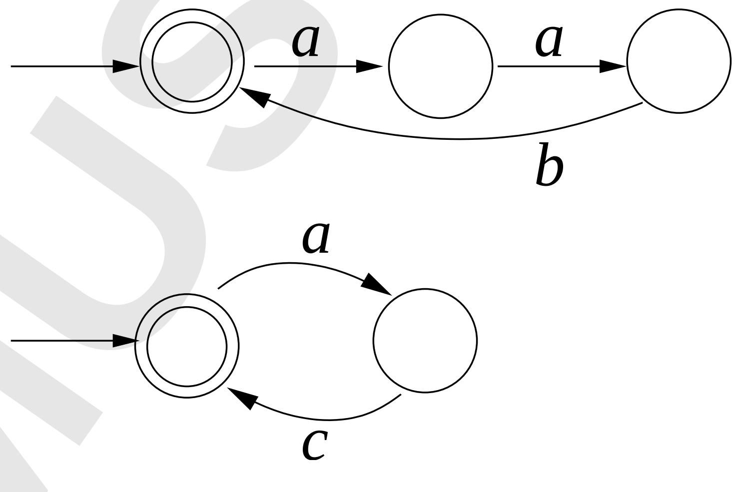


(b) Geben Sie einen <u>indeterminierten</u> endlichen Automaten an für die Sprache

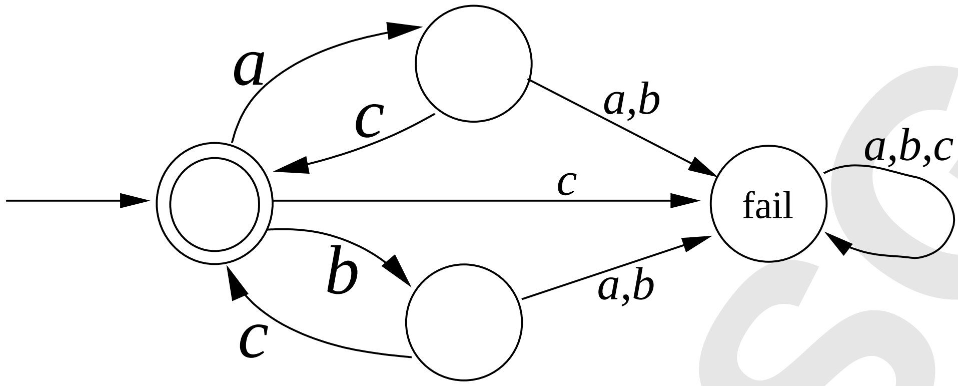
$$\Im(\ (aab)^* + (ac)^*\ )$$

<u>Hinweise:</u>
1. Indeterminierte Automaten können mehr als einen Startzustand haben.
2. Beachten Sie, dass beispielsweise das Wort *aabac* *nicht* in dieser Sprache liegt.

<u>**Lösung:**</u>



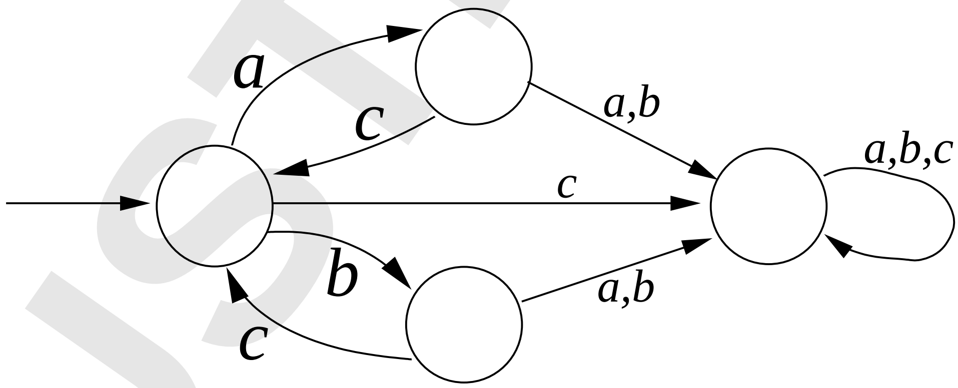
(c) Welche Sprache akzeptiert der folgende determinierte endliche Automat?



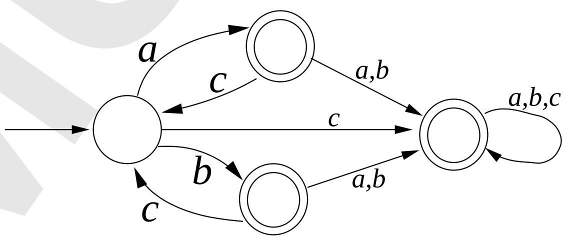
Lösung:

$$
\begin{aligned}
L &= \Im(((a+b)c)^*) \\
  &= \Im((ac+bc)^*)
\end{aligned}
$$

(d) Ergänzen Sie den folgenden determinierten endlichen Automaten so, dass er das *Komplement* $\overline{L}$ derjenigen Sprache L akzeptiert, die der Automat aus Teilaufgabe (c) akzeptiert.



Lösung:



4 Automaten und reguläre Ausdrücke (3+2 = 5 Punkte)

(a) Geben Sie einen regulären Ausdruck für folgende Sprache an:

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält eine gerade Anzahl von } a\}$$

Lösung:

$$(b^*ab^*ab^*)^*$$

oder auch

$$(b^*ab^*a)^*b^*$$

oder auch

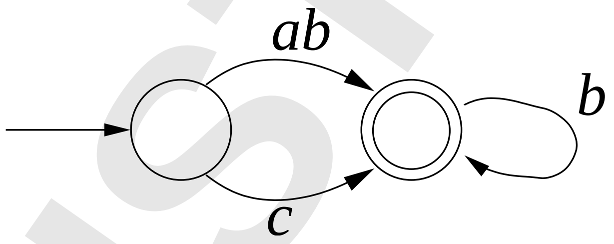
$$b^*(ab^*ab^*)^*$$

(b) Geben Sie einen endlichen Automaten mit ε-Kanten für die Sprache

$$L \;=\; \Im(\,(ab+c)b^*\,)$$

an.

Lösung:



5 Kontextfreie Grammatiken (3+3 = 6 Punkte)

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$\{a^n b^m a \mid m, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m \leq n\}$$

an.

Lösung:
Die Sprache lässt sich auch darstellen als

$$\{a^k a^m b^m a \mid m, k \in \mathbb{N}_0\}$$

Damit ist die Grammatik $G = (\{S, A, T\}, \{a, b\}, R, S)$ eine Lösung, wobei R die folgenden Regeln enthält:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & ATa \\ A & \rightarrow & Aa \mid \varepsilon \\ T & \rightarrow & aTb \mid \varepsilon \end{array}$$

(b) Entfernen Sie alle nutzlosen Symbole aus der kontextfreien Grammatik

$$G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c, d\}, R, S)$$

mit folgenden Regeln in R:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \mid AC \\ A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \\ B & \rightarrow & bD \\ C & \rightarrow & cE \\ D & \rightarrow & Ad \mid a \\ E & \rightarrow & CC \end{array}$$

Lösung:
(Die Symbole E und C sind nicht co-erreichbar.)

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \\ B & \rightarrow & bD \\ D & \rightarrow & Ad \mid a \end{array}$$

6 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen (3+3 = 6 Punkte)

(a) Wie lautet das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen? Ergänzen Sie den folgenden Lückentext an den punktierten Linien.

Lemma (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen).

Sei L eine kontextfreie Sprache.

Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass:

für alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$

existiert eine Zerlegung, d. h.,

es gibt Wörter u, v, w, x, y

mit $z = uvwxy$ und $1 \leq |vx| \wedge |vwx| < n$

so dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $uv^m wx^m y \in L$

(b) Gegeben sei die kontextfreie Sprache

$$L = \{a^m b^{2n} a c^{2n+1} d \mid m, n \in \mathbb{N}_0\} .$$

Das Wort

$$z = aabbacccd$$

ist in L. Geben Sie eine Zerlegung $z = uvwxy$ des Wortes gemäß dem Pumping-Lemma an, für die es sich aufpumpen lässt.

$$u = aa$$
$$v = bb$$
$$w = a$$
$$x = cc$$
$$y = cd$$

7 CYK-Algorithmus (5 Punkte)

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, R, S)$ mit folgenden Regeln in R:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AC \mid AD \\ A &\rightarrow a \\ B &\rightarrow b \\ C &\rightarrow SA \\ D &\rightarrow EA \\ E &\rightarrow EB \mid b \end{aligned}$$

Hinweis: G ist bereits in Chomsky-Normalform.

Parsen Sie das Wort *aabaa* mit dem CYK-Algorithmus. Vervollständigen Sie dazu die folgende Tabelle.

	a	a	b	a	a
a	A	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
a	$-$	A	$\times$	$\times$	$\times$
b	$-$	$-$	B, E	$\times$	$\times$
a	$-$	S	D	A	$\times$
a	S	C	$-$	$-$	A

8 Pushdown-Automaten (2 Punkte)

Gegeben sei der Pushdown-Automat (Kellerautomat)

$$A = (\{s_0, s_1\}, \{a, b\}, \{X, Z_0\}, \Delta, s_0, Z_0, \emptyset)$$

mit folgender Übergangsrelation:

$$\begin{aligned}
\Delta \; = \; \{ \; & ((s_0, a, Z_0), \quad (s_0, XX)), \\
& ((s_0, a, X), \quad (s_0, XXX)), \\
& ((s_0, b, X), \quad (s_1, \varepsilon)), \\
& ((s_1, b, X), \quad (s_1, \varepsilon)) \qquad \}
\end{aligned}$$

Welche der folgenden Sprachen erkennt der Automat *per leerem Keller*?

Kreuzen Sie die zutreffende Sprache an. (Nur eine Antwort ist richtig!)

$\{a^{n+1}b^{2n} \mid n \geq 1\}$	☐
$\{a^{n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$	☒
$\{a^{n}b^{2n+1} \mid n \geq 1\}$	☐
$\{a^{n}b^{2n+2} \mid n \geq 1\}$	☐

9 Turing-Maschinen (4+2 = 6 Punkte)

Gegeben sei die determinierte Turing-Maschine

$$M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{0, 1, g, u, \#\}, \delta, s_0) \ ,$$

deren Übergangsfunktion durch folgende Tabelle definiert ist (alle nicht aufgeführten Übergänge seien undefiniert):

δ	0	1	g	u	$\#$
s_0					(s_1, L)
s_1	(s_1, L)	(s_2, L)			(s_3, R)
s_2	(s_2, L)	(s_1, L)			(s_4, R)
s_3	(s_3, R)	(s_3, R)			(s_5, g)
s_4	(s_4, R)	(s_4, R)			(s_5, u)
s_5			(s_5, R)	(s_5, R)	$(h, \#)$

Die Eingabe für M ist ein Wort $w \in \{0, 1\}^*$. Sei $n = \#_1(w)$ die Anzahl der 1 in w.

Die Maschine M schreibt rechts neben das Eingabewort w ein g, falls n gerade ist, und ein u, falls n ungerade ist.

(a) Geben Sie die Rechnung von M für die Eingabe 101 an. Vervollständigen Sie dazu folgende Auflistung der Konfigurationen:

0.: $s_0,\ \#101\underline{\#}$

1.: $s_1,\ \#10\underline{1}\#$

2.: $s_2,\ \#1\underline{0}1\#$

3.: $s_2,\ \#\underline{1}01\#$

4.: $s_1,\ \underline{\#}101\#$

5.: $s_3,\ \#\underline{1}01\#$

6.: $s_3,\ \#1\underline{0}1\#$

7.: $s_3,\ \#10\underline{1}\#$

8.: $s_3,\ \#101\underline{\#}$

9.: $s_5,\ \#101\underline{g}\#$

10.: $s_5,\ \#101g\underline{\#}$

11.: $h,\ \#101g\underline{\#}$

(b) Ändern Sie M so ab, dass die entstehende DTM das gleiche macht wie M, nur dass nun n die Länge des Eingabewortes ist (statt die Anzahl der 1 in w).

Tragen Sie dazu in die folgende Tabelle
nur diejenigen Übergänge ein, die sich gegenüber M ändern!

Hinweis: Zwei Änderungen genügen.

δ	0	1	g	u	#
s_0					
s_1	(s_2, L)				
s_2	(s_1, L)				
s_3					
s_4					
s_5					

Lösung:

Es genügt, dafür zu sorgen, dass die Maschine, während sie nach links läuft (Zustände s_1 und s_2), die 0 genau so behandelt wie die 1 (was M nicht macht).

10 Komplexitätstheorie und Entscheidbarkeit (1+2+2 = 5 Punkte)

(a) Wie lautet die Definition der Komplexitätsklasse

co-NP ?

In Ihrer Antwort dürfen Sie sich auf die Klasse NP beziehen, ohne diese zu definieren.

Lösung:

co-NP ist die Klasse der Sprachen (bzw. Probleme), deren Komplemente in der Klasse NP liegen:

$$\text{co-NP} = \{L \mid \overline{L} \in \text{NP}\}$$

(b) Benennen und definieren Sie eine Sprache (bzw. ein Problem), die NP-vollständig ist und bei der es sich *nicht* um das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik oder eine seiner Varianten (SAT, CNF, k-CNF) handelt.

Lösung:

Ein Beispiel ist L_{Clique_k}. Das ist die Sprache, die aus allen ungerichteten Graphen besteht, die eine Clique (einen vollständigen Teilgraphen) der Größe k enthalten.

Es gibt eine Vielzahl weiterer Beispiele. In der Vorlesung wurden u. a. das k-Färbbarkeitsproblem und das Hamiltonkreis-Problem erwähnt.

(c) Benennen und definieren Sie ein Problem, das unentscheidbar ist und bei dem es sich *nicht* um das Halteproblem oder eine seiner Varianten (Null-Halteproblem, spezielles Halteproblem) handelt.

Lösung:

Ein Beispiel ist das Gleichheitsproblem, also die Frage, ob die DTM mit der Gödelnummer n die gleiche Sprache über einer Signatur Σ akzeptiert wie die DTM mit der Gödelnummer m.

Es gibt eine Vielzahl weiterer Beispiele. In der Vorlesung wurden u. a. das Leerheitsproblem und das Entscheidbarkeitsproblem erwähnt.