Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Inhalt von Teil V

- Was ist eine **berechenbare** Funktion?
- Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)?
- Modifikationen von DTMs:
  (mehrere) Halbbänder, zweiseitig unbeschränkte Bänder
- Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- **Gödelisieren**: Programme als Wörter in Σ^*.
- **Aufzählbar** vs. **entscheidbar**
- **Unentscheidbarkeit**, Reduktionen von Problemen aufeinander.

Teil V

Turing Maschinen

Grundlegende Fragen

Frage: Berechenbarkeit?

Betrachtet werden Abbildungen über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:

Welche davon sollen berechenbar genannt werden?

Frage: Komplexität?

Um die Komplexität eines Algorithmus' zu messen braucht man ein Maschinenmodell zum Vergleich!

Welches Modell wird gewählt?

Robustheit: Das Modell soll nicht von einfachen Modifikationen abhängig sein.

Antwort: Turing-Maschinen

Turing-Maschine: Die Maschine unter den Maschinen

One ring to rule them all.

Turing-Maschinen

Alan Turing ⋆ 1912, † 1954

- Mathematiker und Logiker
- Einer der Begründer der Informatik
- 1936: Definition des Berechenbarkeitsmodells „Turing-Maschine"
- 1938: Promotion bei Church in Princeton
- Während des zweiten Weltkriegs: Kriegsentscheidender(?) Beitrag zur Entschlüsselung deutscher Funksprüche
- Dozent an der Universität Manchester
- Beiträge zur KI („Turing-Test")
- Tragischer Tod: Strafverfolgung wegen Homosexualität; (vermutlich) Selbstmord
- Nach ihm benannt: Turing-Award

Immer mächtigere Automaten

Erinnerung: Endliche Automaten

- akzeptieren reguläre Sprachen
- Einziger Speicher: der **Zustand** (endlich).
- Die Zustandsmenge kann groß sein, ist aber endlich.
- Das Eingabewort wird nur einmal gelesen, von links nach rechts.

Immer mächtigere Automaten

Erinnerung: Pushdown-Automaten

- akzeptieren kontextfreie Sprachen
- Erster Speicher: der Zustand (endlich)
- Zweiter Speicher: der **Keller**
  (unbeschränkte Größe, beschränkte Zugriffsart)
- Das Eingabewort wird nur einmal gelesen, von links nach rechts.

Immer mächtigere Automaten

Ausblick: Turing-Maschinen

- akzeptieren Sprachen **vom Typ 0**.
- Erster Speicher: der Zustand (endlich)
- Zweiter Speicher: Band
  (unbeschränkte Größe, **Zugriff an beliebiger Stelle**
- Turing-Maschine hat einen Schreib-/Lesekopf, den sie über diesem Band in einem Rechenschritt um ein Feld nach rechts oder links bewegen kann.
- Das Eingabewort steht (am Anfang) auf dem Band.
  Die Maschine kann es **beliebig oft lesen**.

Turing-Maschine

Definition 9.1 (Turing-Maschine (DTM))

Eine **determinierte Turing-Maschine (DTM)** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen mit $h \notin K$,
  (h ist der **Haltezustand**)
- Σ ein Alphabet mit $L, R \notin \Sigma$, $\# \in \Sigma$,
- $\delta : K \times \Sigma \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})$ eine Übergangs**funktion**
- $s \in K$ ein Startzustand.

Anzahl der Zustände: $|K| - 1$
(Startzustand wird nicht mitgezählt).

Turing-Maschine

Arbeitsschritt einer Turing-Maschine

Übergang

$$\delta(q, a) = (q', x)$$

bedeutet:

In Abhängigkeit

- vom aktuellen Zustand $q \in K$
- von dem Zeichen $a \in \Sigma$, das unter dem Schreib-/Lesekopf steht

geschieht folgendes:

- entweder ein **Schritt nach links**, falls $x = L$ ist
- oder ein **Schritt nach rechts**, falls $x = R$ ist
- oder **das Zeichen** a, das momentan unter dem Schreib-/Lesekopf steht, wird **durch** $b \in \Sigma$ **überschreiben**, falls $x = b \in \Sigma$
- der **Zustand** wird zu $q' \in K \cup \{h\}$ **geändert**,

Turing-Maschine

Leerzeichen

Das spezielle Zeichen # (*blank*) ist das Leerzeichen.

Es ist nie Teil des Eingabeworts; man kann es u.a. dazu benutzen, Wörter voneinander abzugrenzen.

Turing-Maschine

Begrenzung des Bandes

Das Band einer DTM ist **einseitig unbeschränkt**:

- Nach rechts ist es unendlich lang.
- Nach links hat es ein Ende.
- Wenn eine DTM versucht, das Ende zu überschreiten, bleibt sie „hängen“.

  In diesem Fall hält sie nicht.

Turing-Maschine

Anfangskonfiguration

- Ganz links auf dem Band steht ein Blank
- Direkt rechts davon steht das Eingabewort
- Wenn eine DTM mehrere Eingabewörter hintereinander bekommt, sind sie durch Blanks getrennt.
- Rechts vom letzten Eingabewort stehen nur noch Blanks.
- Der Schreib-/Lesekopf der DTM steht auf dem Blank direkt rechts neben dem (letzten) Eingabewort.

Merke

Das Band enthält immer nur endlich viele Symbole, die keine Blanks sind.

Turing-Maschine

Beispiel 9.2 ($\mathcal{R}(a)$: *a*’s durch *b*’s ersetzen)

Die folgende Turing-Maschine $\mathcal{R}(a)$ erwartet *ein* Eingabewort.
Sie liest es von rechts nach links einmal durch und macht dabei jedes a zu einem b.

Es ist

$$\mathcal{R}(a) = (\ \{q_0, q_1\}, \{a, b, \#\}, \delta, q_0\ )$$

mit folgender δ-Funktion:

$$\begin{array}{ll}
q_0, \# \mapsto q_1, L & q_1, \# \mapsto h, \# \\
q_0, a \mapsto q_0, a & q_1, a \mapsto q_1, b \\
q_0, b \mapsto q_0, b & q_1, b \mapsto q_1, L
\end{array}$$

Turing-Maschine

Beispiel 9.3 ($L_\#$)

Die folgende Turing-Maschine $\mathcal{L}_\#$ läuft zum ersten Blank links von der momentanen Position.

Es ist $\mathcal{L}_\# = (\ \{q_0, q_1\}, \{a, b, \#\}, \delta, q_0\ )$ mit folgender δ-Funktion:

$$\begin{array}{ll} q_0, \# \mapsto q_1, L & q_1, \# \mapsto h, \# \\ q_0, a \mapsto q_1, L & q_1, a \mapsto q_1, L \\ q_0, b \mapsto q_1, L & q_1, b \mapsto q_1, L \end{array}$$

q_0: Anfangsposition
q_1: Anfangsposition verlassen

Turing-Maschine

Beispiel 9.4 (Copy)

Die folgende DTM $\mathcal{C}$ erhält als Eingabe einen String Einsen.
Dieser String wird kopiert:
Falls n Einsen auf dem Band stehen, stehen nach Ausführung von $\mathcal{C}$ $2n$ Einsen auf dem Band stehen, (getrennt durch ein Blank #).

state	#	1	c
q_0	$\langle q_1, c\rangle$	–	–
q_1	$\langle q_2, R\rangle$	$\langle q_1, L\rangle$	$\langle q_1, L\rangle$
q_2	–	$\langle q_3, \#\rangle$	$\langle q_7, \#\rangle$
q_3	$\langle q_4, R\rangle$	–	–
q_4	$\langle q_5, 1\rangle$	$\langle q_4, R\rangle$	$\langle q_4, R\rangle$
q_5	$\langle q_6, 1\rangle$	$\langle q_5, L\rangle$	$\langle q_5, L\rangle$
q_6	–	$\langle q_2, R\rangle$	–
q_7	$\langle q_8, R\rangle$	–	–
q_8	$\langle h, \#\rangle$	$\langle q_8, R\rangle$	–

Turing-Maschine

Übergangsfunktion δ nicht überall definiert

Wir erlauben ab jetzt auch, daß δ nicht überall definiert ist.

Falls die DTM dann in einen solchen nichtdefinierten Zustand kommt, sagen wir **die DTM hängt**. Sie **hält** also nicht.

Dies wird z.T. in der Literatur anders gehandhabt.

Turing-Maschine

Beispiel 9.5 (Print n)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konstruieren wir eine Maschine,
die genau n Einsen auf das leere Band schreibt
(**mit möglichst wenig Zuständen**):

1. schreibe $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ viele Einsen auf das Band
(höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Zustände)
2. kopiere diesen String
(8 Zustände)
3. ersetze das trennende # durch eine 1
4. falls n gerade ist, ersetzen die letzte 1 durch # (2 neue Zustände)

Insgesamt können wir n Einsen mit höchstens $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 10$ Zuständen konstruieren

Turing-Maschine

Begriff der Konfigurationen

- **Konfiguration** beschreibt die *komplette* aktuelle Situation der Maschine in einer Rechnung.
- Eine **Rechnung** ist eine Folge von Konfigurationen, wobei immer von einer Konfiguration zu einer Nachfolgekonfiguration übergegangen wird.

Konfiguration einer DTM

Besteht aus 4 Elementen:

- das aktuellen Zustand q,
- das Wort w links vom Schreib-/Lesekopf,
- das Zeichen a, auf dem der Kopf gerade steht,
- das Wort u rechts von der aktuellen Kopfposition.

Turing-Maschine

Konfigurationen sind endlich

- w enthält das Anfangsstück des Bandes vom linken Ende bis zur aktuellen Kopfposition.
- **Links ist das Band endlich!**
  $w = \varepsilon$ bedeutet, daß der Kopf ganz links steht
- u enthält den Bandinhalt rechts vom Schreib-/Lesekopf bis zum letzten Zeichen, das kein Blank ist.
- **Nach rechts ist das Band unendlich, aber es enthält nach rechts von einer bestimmten Bandposition an nur noch Blanks**.
  $u = \varepsilon$ bedeutet, daß rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

Turing-Maschine

Definition 9.6 (Konfiguration einer DTM)

Eine **Konfiguration** C einer DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist ein Wort der Form $C = q, w\underline{a}u$. Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in \Sigma^*$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Bandzeichen unter der Schreib-/Lesekopf.
  Notation: Die Position des Schreib-/Lesekopfes ist durch einen Unterstrich gekennzeichnet.
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

Turing-Maschine

Definition 9.7 (Nachfolgekonfiguration)

Eine Konfiguration C_2 heißt **Nachfolgekonfiguration** von C_1, in Zeichen

$$C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$$

falls gilt:

- $C_i = q_i, w_i\underline{a_i}u_i$ für $i \in \{1, 2\}$, und
- es gibt einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ wie folgt:
  Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann ist $w_1 = w_2,\ u_1 = u_2,\ a_2 = b$.
  Fall 2: $b = L$. Dann gilt für w_2 und a_2: $w_1 = w_2 a_2$.
  Für u_2 gilt: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \varepsilon$ ist, so ist $u_2 = \varepsilon$, sonst ist $u_2 = a_1 u_1$.
  Fall 3: $b = R$. Dann ist $w_2 = w_1 a_1$.
  Für a_2 und u_2 gilt: Wenn $u_1 = \varepsilon$ ist, dann ist $u_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$, ansonsten ist $u_1 = a_2 u_2$.

Turing-Maschine

Definition 9.8 (Eingabe)

w heißt **Eingabe** (*input*) für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

startet.

$(w_1, \ldots, w_n)$ heißt **Eingabe** für $\mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ mit der **Startkonfiguration**

$$C_0 = s, \#w_1\# \ldots \#w_n\underline{\#}$$

startet.

Turing-Maschine

Definition 9.9 (Halten, Hängen)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** $q = h$.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in $C = q, w\underline{a}u$ **gdw.** es keine Nachfolgekonfiguration gibt
  Insbesondere: wenn $w = \varepsilon \wedge \exists q' \ \delta(q, a) = (q', L)$.

Turing-Maschine

Definition 9.10 (Rechnung)

Sei $\mathcal{M}$ eine Turing-Maschine. Man schreibt

$$C \vdash^*_{\mathcal{M}} C'$$

gdw.:
es gibt eine Reihe von Konfigurationen

$$C_0, C_1, \ldots, C_n \qquad (n \geq 0)$$

so daß

- $C = C_0$ und $C' = C_n$
- für alle $i < n$ gilt: $C_i \vdash_{\mathcal{M}} C_{i+1}$

Dann heißt $C_0, C_1, \ldots, C_n$ eine **Rechnung** der Länge n von C_0 nach C_n.

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Definition 9.11 (TM-berechenbare Funktion)

Sei Σ_0 ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma_0$.
Eine (partielle) Funktion

$$f : ({\Sigma_0}^*)^m \to ({\Sigma_0}^*)^n$$

heißt **DTM-berechenbar**, falls:

Es existiert eine determinierte Turing-Maschine $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$

- mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$,
- so daß für alle $w_1, \ldots, w_m,\ u_1, \ldots, u_n \in {\Sigma_0}^*$ gilt:
  - $f(w_1, \ldots, w_m) = (u_1, \ldots, u_n)$ <u>gdw</u>
    $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}} h, \#u_1\# \ldots \#u_n\underline{\#}$
  - $f(w_1, \ldots, w_m)$ ist undefiniert <u>gdw</u>
    $\mathcal{M}$ gestartet mit $s, \#w_1\# \ldots \#w_m\underline{\#}$ hält nicht (läuft unendlich oder hängt)

Turing-Maschine können Funktionen berechnen

Vorsicht

Wir betrachten Turing-Maschinen hier unter einem anderen Aspekt als alle bisherigen Automaten:

- Bei endlichen Automaten und Pushdown-Automaten haben wir untersucht, **welche Sprachen sie akzeptieren**.
- Bei Turing-Maschinen untersuchen wir,
  - welche Sprachen sie akzeptieren und
  - **welche Funktionen sie berechnen**.

Akzeptieren ist Spezialfall von Berechnen

Turing-Maschine: Akzeptierte Sprache

Definition 9.12 (Von einer DTM akzeptierte Sprache)

Ein Wort w wird **akzeptiert von einer DTM** $\mathcal{M}$,
falls $\mathcal{M}$ auf Eingabe von w hält
(wobei am Ende der Kopf auf dem ersten Blank rechts von w steht).

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ **wird akzeptiert von einer DTM** $\mathcal{M}$, wenn genau die Wörter aus L aus $\mathcal{M}$ und keine anderen akzeptiert werden.

Achtung

Bei nicht akzeptierten Wörtern muss die DTM nicht halten
Sie darf es sogar nicht!

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Funktionen auf natürlichen Zahlen

- Wir verwenden die **Unärdarstellung**
  Eine Zahl n wird auf dem Band der Maschine durch n senkrechte Striche dargestellt.
- Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$ berechnet eine Funktion

$$f: \ \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}^n$$

  in Unärdarstellung wie folgt:
  - Wenn $f(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_n)$ ist, dann rechnet $\mathcal{M}$

$$s, \#|^{i_1}\# \dots \#|^{i_k}\underline{\#} \ \vdash^*_{\mathcal{M}} \ h, \#|^{j_1}\# \dots \#|^{j_n}\underline{\#}$$

  - Ist $f(i_1, \dots, i_k)$ undefiniert, dann hält $\mathcal{M}$ bei Input $\#|^{i_1}\# \dots \#|^{i_k}\#$ nicht.

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Definition 9.13

- **TM**^{part} ist die Menge der partiellen TM-berechenbaren Funktionen $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$
- **TM** ist die Menge der totalen TM-berechenbaren Funktionen $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$

Turing-Maschine: Funktionen auf natürlichen Zahlen

Achtung: Einschränkung

In der Definition von TM und TM^{part} haben wir uns eingeschränkt:

- nur Funktionen über natürliche Zahlen
- nur Funktionen mit einstelligem Wertebereich

Das ist keine echte Einschränkung

Elemente (Wörter) aus anderen Definitions- und Wertebereiche können als natürliche Zahlen kodiert werden.

Teil V

Turing Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Standard-DTM

Die Turing-Maschine, die wir bisher kennen, ...

- ist determiniert
- hat ein einseitig unbeschränktes Band (**Halbband**).

Ab jetzt nennen wir sie auch:
Standard-Turing-Maschine (Standard-DTM oder kurz DTM)

Variationen

- **zweiseitig** unbeschränktes Band (kein Hängen)
- **mehrere** Bänder
- **indeterminierte** Turing-Maschinen

Variationen von Turing-Maschinen

Turing-Maschinen, die nie hängen

Gegeben:
Eine Turing-Maschine $\mathcal{M}$, mit Eingabge $\#w\underline{\#}$

Daraus konstruieren wir eine DTM $\mathcal{M}'$, die

- dasselbe berechnet wie $\mathcal{M}$
- **nie hängt**.

Variationen von Turing-Maschinen

Konstruktion der TM, die nie hängt

Das Bandende ist am Anfang ein Zeichen links vom Eingabewort

DTM $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- Sie verschiebt die Eingabe ein Zeichen nach rechts.
- Dann druckt sie ganz links ein **Sonderzeichen** α, das das **Bandende** anzeigt.
- Ab dann rechnet sie wie $\mathcal{M}$.
- Aber:
  Wenn sie α erreicht, bleibt sie dort stehen und druckt immer wieder α.

Variationen von Turing-Maschinen

Eigenschaften der nicht-hängenden DTM

- $\mathcal{M}'$ hält für Eingabe w gdw $\mathcal{M}$ hält für Eingabe w.
- $\mathcal{M}'$ hängt nie.
  Wenn $\mathcal{M}$ hängt, rechnet $\mathcal{M}'$ unendlich lang.

O.B.d.A. sollen alle Turing-Maschinen, die wir von jetzt an betrachten, nie hängen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band

- Die Definition der Maschine bleibt gleich.
- Die Definition der **Konfiguration** ändert sich.
- Sie hat immer noch die Form $q, w\underline{a}u$, aber:
  - w umfasst analog zu u alle Zeichen bis zum letzten nicht-Blank links vom Schreib-/Lesekopf.
  - $w = \varepsilon$ bzw. $u = \varepsilon$ bedeutet, daß links bzw. rechts vom Schreib-/Lesekopf nur noch Blanks stehen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition 10.1 (DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band, zw-DTM)

Eine **Turing-Maschine mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)** ist eine DTM, für die die Begriffe der Konfiguration und der Nachfolgekonfiguration wie folgt definiert sind:

Eine **Konfiguration** C einer zw-DTM $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \delta, s)$ ist von der Form

$$C = q, w\underline{a}u$$

Dabei ist

- $q \in K \cup \{h\}$ der aktuelle Zustand,
- $w \in (\Sigma - \{\#\})\Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt links des Kopfes,
- $a \in \Sigma$ das Zeichen unter dem Kopf, und
- $u \in \Sigma^*(\Sigma - \{\#\}) \cup \{\varepsilon\}$ der Bandinhalt rechts des Kopfes.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Definition (Forts.)

$C_2 = q_2, w_2\underline{a_2}u_2$ heißt **Nachfolgekonfiguration** von $C_1 = q_1, w_1\underline{a_1}u_1$,
in Zeichen $C_1 \vdash_{\mathcal{M}} C_2$,
falls es einen Übergang $\delta(q_1, a_1) = (q_2, b)$ gibt, mit:

Fall 1: $b \in \Sigma$. Dann $w_1 = w_2, u_1 = u_2$ und $a_2 = b$.

Fall 2: $b = L$. Für u_2: Wenn $a_1 = \#$ und $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$, sonst $u_2 = a_1 u_1$.
Für a_2 und w_2: Wenn $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; sonst $w_1 = w_2 a_2$.

Fall 3: $b = R$. Für w_2: Wenn $a_1 = \#$ und $w_1 = \varepsilon$ ist, dann $w_2 = \varepsilon$, sonst $w_2 = w_1 a_1$.
Für a_2 und u_2: Wenn $u_1 = \varepsilon$ ist, dann $u_2 = \varepsilon$ und $a_2 = \#$; ansonsten $u_1 = a_2 u_2$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Theorem 10.2 (Simulation von zw-DTM durch DTM)

Zu jeder zw-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet oder eine Sprache L akzeptiert, existiert eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet bzw. L akzeptiert.

Beweis

Sei $w = a_1 \dots a_n$ die Eingabe für $M = (K, \Sigma, \delta, s)$.
Dann sieht das beidseitig unendliche Band zu Beginn der Rechnung so aus:

$$\dots \#\#\# a_1 \dots a_n \underline{\#}\# \dots$$

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Idee:

- $\mathcal{M}$ hat quasi zwei unendlich lange Halbbänder.
- Ziel ist, den Inhalt beider Halbbänder von $\mathcal{M}$ auf einem unterzubringen.
- Dazu: Den Teil des Bandes, der zwei Zeichen links vom Input w beginnt, umklappen:

  Spur 1 $\#\# \ \dots \# \ \#$
  Spur 2 $\# a_1 \dots a_n \underline{\#}^{\dots}$
- Die DTM $\mathcal{M}'$ hat zwei **Spuren**, d.h. zwei Reihen von Zeichen, die auf demselben Band untergebracht (kodiert) sind.
- Das Bandalphabet von $\mathcal{M}'$ ist $\Sigma' \supseteq \Sigma \times \Sigma$.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Sei $\mathcal{M}' = (K', \Sigma', \delta', s)$. $\mathcal{M}'$ rechnet so:

- $\mathcal{M}'$ legt zunächst eine zweite Spur an,
- simuliert dann die Arbeit von $\mathcal{M}$, und
- transformiert dann das Ergebnis wieder auf nur eine Spur herunter.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Erste Phase der Rechnung:
$\mathcal{M}'$ rechnet

$$s, \#a_1 \dots a_n\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q, \$ \begin{matrix} \#\# & \dots \# & \# \\ \# a_1 & \dots a_n & \underline{\#} \end{matrix} \# \dots$$

Die zweite Spur wird nur so weit wie nötig angelegt.

Mit dem Symbol $\$$ markiert $\mathcal{M}'$ das Ende des Halbbands, damit sie nicht hängenbleibt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Zweite Phase der Rechnung:
$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$.

Dabei muß sie sich immer merken, auf welcher der beiden Spuren sie gerade arbeitet.

Deshalb definieren wir $K' \supseteq K \times \{1, 2\}$.
(q, i) bedeutet, daß die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ im Zustand q ist und $\mathcal{M}'$ auf Spur i arbeitet.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Für die Simulation von $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{M}'$ soll nun gelten:

$\mathcal{M}$ erreicht von $s, \# \vdots \# w \underline{\#}$ aus eine Konfiguration $q, u_1 b \vdots a u_2$

<u>gdw</u>

$\mathcal{M}'$ rechnet $p, \$ \begin{smallmatrix} \# & \dots & \# \\ \# & w & \underline{\#} \end{smallmatrix} \# \vdash^*_{\mathcal{M}'} p', \$ \begin{smallmatrix} b & u_1^R & \# \\ a & u_2 & \# \end{smallmatrix} \dots \begin{smallmatrix} \# \\ \# \end{smallmatrix} \#$

($\vdots$ steht in beiden Konf. zwischen denselben zwei Bandpositionen (an denen das Band “umklappt”))

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

$\mathcal{M}'$ simuliert $\mathcal{M}$ wie folgt:

- Wenn $\mathcal{M}'$ das Zeichen $\$$ erreicht, wechselt sie die Spur.
- Wenn die simulierte Maschine $\mathcal{M}$ nach rechts (links) geht, geht $\mathcal{M}'$ nach rechts (links) auf Spur 2 und nach links (rechts) auf Spur 1.
- Wenn $\mathcal{M}'$ ein $\#$ erreicht (d.h. sie erreicht den Bandteil, wo noch nicht zwei Spuren angelegt sind), macht sie daraus $\begin{smallmatrix} \# \\ \# \end{smallmatrix}$.

Gilt etwa $\delta_{\mathcal{M}}(q, a) = (q', L)$, so muß in $\mathcal{M}$ gelten:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q, 2), \begin{smallmatrix} x \\ a \end{smallmatrix}\big) = \big((q', 2), L\big)$ für alle möglichen x,
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q, 1), \begin{smallmatrix} a \\ x \end{smallmatrix}\big) = \big((q', 1), R\big)$ (auf der oberen Spur ist der Inhalt des “linken Halbbandes” revers notiert, deshalb muß hier die Laufrichtung entgegengesetzt sein).

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Außerdem gilt immer:

- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,1),\$\big) = \big((q,2),R\big)$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,2),\$\big) = \big((q,1),R\big)$
  Spurwechsel beim Überschreiten von $\$$
- $\delta_{\mathcal{M}'}\big((q,i),\#\big) = \big(q,i),\substack{\#\\\#}\big)$
  Erzeugen eines neuen Doppelspurstücks
- etc.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Wenn dann $\mathcal{M}$ mit $h, u\underline{\#}$ hält, dann erreicht $\mathcal{M}'$ eine Konfiguration, die eine der folgenden Formen hat:

$$(i) \qquad (h,1),\$\substack{\#\\\#}\cdots\substack{\overline{\#}\\\#}\substack{u^R\\\#\ldots\#}\substack{\#\\\#}\cdots\substack{\#\\\#} \text{ oder}$$

$$(ii) \qquad (h,2),\$\substack{\#\\\#}\cdots\substack{\#\\\#}\substack{\#\ldots\#\\u}\substack{\#\\\underline{\#}}\cdots\substack{\#\\\#} \text{ oder}$$

$$(iii) \qquad (h,2),\$\substack{u_1^R\\u_2\underline{\#}}\substack{\#\\\#}\cdots\substack{\#\\\#} \text{ mit } u_1u_2 = u.$$

Bei Konfigurations-Form (iii) kann entweder das u_1^R über das u_2 “hinausragen” oder umgekehrt.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Dritte Phase der Rechnung:
Die Simulation von $\mathcal{M}$ ist abgeschlossen.

$\mathcal{M}'$ muß nun den Bandinhalt von zwei Spuren auf nur eine heruntertransformieren, um danach die Konfiguration $h, \#u\underline{\#}$ zu erreichen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

- $\mathcal{M}'$ macht zunächst alle $\substack{\#\\\#}$ rechts vom beschriebenen Bandteil zu #. Für Fall (i) und (ii) löscht sie die $\substack{\#\\\#}$ links von u^R bzw. u.
- Für Fall (iii) schiebt $\mathcal{M}'$ dann die untere Spur nach links, bis sie eine Konfiguration $q, \substack{u_1^R\\\#\ldots\#}u_2\underline{\#}$ erreicht.
- Für Fall (i) und (iii) muß $\mathcal{M}'$ jetzt u_1^R bzw. u^R auf nur eine Spur transformieren und zugleich invertieren, sie muß also für den allgemeineren Fall (iii) $q,\$\substack{u_1^R\\\#\ldots\#}u_2\underline{\#} \vdash^*_{\mathcal{M}'} q',\$u_1u_2\underline{\#}$ rechnen.
- Danach muß $\mathcal{M}'$ nur noch das $\$$ links löschen und nach rechts neben u laufen.

DTM mit zweiseitig unbeschränktem Band (zw-DTM)

Beweis (Forts.)

Damit hat die Standard-DTM $\mathcal{M}'$ die Arbeitsweise der zw-DTM $\mathcal{M}$ vollständig simuliert.

Also kann man mit zw-Turing-Maschinen nicht mehr berechnen als mit Standard DTM'n. □

DTM mit k Halbbändern

Definition 10.3 (DTM mit k Halbbändern, k-DTM)

Eine **Turing-Maschine** $\mathcal{M} = (\ K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_k, \delta, s\ )$ **mit k Halbbändern** (mit je einem Kopf) ist eine Turing-Maschine mit einer Übergangsfunktion

$$\delta : K \times \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_k \to (K \cup \{h\}) \times (\Sigma_1 \cup \{L, R\}) \times \ldots \times (\Sigma_k \cup \{L, R\})$$

Eine **Konfiguration** einer k-Turing-Maschine hat die Form

$$C = q, w_1 \underline{a_1} u_1, \ldots, w_k \underline{a_k} u_k.$$

DTM mit k Halbbändern

DTM mit k Halbbändern

- Die Köpfe einer k-DTM können sich **unabhängig** bewegen (sonst hätten wir nur eine DTM mit k Spuren).
- Die Definition der Nachfolgekonfiguration verläuft analog zu der Definition bei Standard-DTM.
- Für eine k-DTM, die eine Funktion $f : \Sigma_0^m \to \Sigma_0^n$ berechnet, legen wir fest, daß sowohl die m Eingabewerte als auch – nach der Rechnung – die n Ergebniswerte auf dem ersten Band stehen sollen.
- Es übertragen sich alle Begriffe wie *berechenbar, entscheidbar* etc. kanonisch auf k-DTM.

DTM mit k Halbbändern

Theorem 10.4 (Simulation von k-DTM durch DTM)

Zu jeder k-DTM $\mathcal{M}$, die eine Funktion f berechnet (resp. eine Sprache L akzeptiert), existiert eine DTM $\mathcal{M}'$, die ebenfalls f berechnet (resp. L akzeptiert).

DTM mit k Halbbändern

Beweis (Skizze)

Wir arbeiten mit einer Turing-Maschine mit mehreren Spuren.

Um eine **k-DTM** zu simulieren, verwenden wir **$2k$ Spuren**, also Bandzeichen, die aus $2k$ übereinander angeordneten Buchstaben bestehen.

- In den Spuren mit ungerader Nummer stehen die Inhalte der k Bänder von $\mathcal{M}$.
- Die Spuren mit gerader Nummer verwenden wir, um die Positionen der Köpfe von $\mathcal{M}$ zu simulieren:
  Die $2i$-te Spur enthält an genau einer Stelle ein $\wedge$, nämlich da, wo $\mathcal{M}$ gerade seinen i-ten Kopf positioniert hätte, und ansonsten nur Blanks.

$\mathcal{M}'$ kodiert zunächst die Eingabe von $\mathcal{M}$. Dann simuliert $\mathcal{M}'$ die Maschine $\mathcal{M}$. Am Ende der Rechnung wird noch die Ausgabe dekodiert.

Teil V

Turing Maschinen

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.1 (Indeterminierte Turing-Maschine, NTM)

Eine **indeterminierte Turing-Maschine** $\mathcal{M}$ ist ein Tupel

$$M = (K, \Sigma, \Delta, s)$$

Dabei sind K, Σ, s definiert wie bei determinierten Turing-Maschinen.

Übergangs**relation**:

$$\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times \big((K \cup \{h\}) \times (\Sigma \cup \{L, R\})\big)$$

Indeterminierte Turing-Maschine

Mehrere Nachfolgekonfigurationen

Konfigurationen sind definiert wie bei DTMs.

Nun kann eine Konfiguration aber mehrere mögliche Nachfolgekonfigurationen haben.

Indeterminierte Turing-Maschine

Definition 11.2 (NTM: Halten, Hängen, Akzeptieren)

Sei $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s_0)$ eine indeterminierte Turing-Maschine.

- $\mathcal{M}$ **hält** bei Input w, falls es **unter den möglichen Rechnungen**, die $\mathcal{M}$ wählen kann, **eine gibt**, so daß $\mathcal{M}$ eine Haltekonfiguration erreicht.
- $\mathcal{M}$ **hängt** in einer Konfiguration, wenn es keine (durch Δ definierte) Nachfolgekonfiguration gibt.
- $\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort w, falls sie **von $s, \#w\underline{\#}$ aus einen Haltezustand erreichen kann**, und $\mathcal{M}$ akzeptiert eine Sprache L, wenn sie genau alle Wörter $w \in L$ akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschine

Bemerkung

Wenn es nicht nur darauf ankommt, ob die Maschine hält, sondern auch mit welchem Bandinhalt:

Welche der vielen Haltekonfigurationen sollte dann gelten?

Um dies Problem zu umgehen, übertragen wir die Begriffe des *Entscheidens* und *Aufzählens* **nicht** auf NTM. Im Allgemeinen verwendet man NTM auch nicht dazu, Funktionen zu berechnen.

Indeterminierte Turing-Maschine

Wie rechnet eine indeterminierte Turing-Maschine?

- Die Regeln einer determinierten DTM kann man sich als Programm (aus sehr einfachen Schritten) vorstellen.
- **Bei NTM ist das anders!**
- **Eine NTM ist nicht einfach eine Maschine, die immer richtig rät!**

Dieselbe Diskussion hatten wir bei indeterminierten endlichen Automaten.

Indeterminierte Turing-Maschine

Vorstellung von einer NTM

- Korrekte Vorstellung:
  - Übergänge von Konfiguration zu Nachfolgekonfiguration entspr. Regelmenge
  - **plus Suchverfahren!**

  oder: Eine NTM beschreitet alle möglichen Rechenwege parallel.
- **Eine NTM akzeptiert ein Wort, wenn es mindestens einen Berechnungsweg gibt, der in einer Haltekonfiguration endet.**
- Sprechweise **“Die NTM rät”**: Wir verwenden diese Sprechweise, sie ist aber mit Vorsicht zu genießen!

Indeterminierte Turing-Maschine

Beispiel 11.3

Eine indeterminierte Turing-Maschine, die

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ besitzt } aba \text{ als Teilwort}\}$$

azkeptiert.

Siehe Tafel.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beispiel 11.4

Sei

$$L = \{|^n \mid n \text{ ist nicht prim und } n \geq 2\}$$

Eine NTM kann diese Sprache wie folgt azeptieren:

1. Eine Zahl „raten“ und (nach rechts) aufs Band schreiben.
2. Noch eine Zahl „raten“ und daneben schreiben.
3. Die beiden Zahlen miteinander multiplizieren.
4. Das Ergebnis mit der Eingabe vergleichen.
5. Genau dann, wenn beide gleich sind, anhalten

Indeterminierte Turing-Maschine

Theorem 11.5 (Simulation von NTM durch DTM)

Jede Sprache, die von einer indeterminierten Turing-Maschine akzeptiert wird, wird auch von einer Standard-DTM akzeptiert.

Beweis (Anfang)

Sei

- L eine Sprache über Σ_0^* mit $\# \notin \Sigma_0$;
- $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s)$ eine indeterminierte Turing-Maschine, die L akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Wir konstruieren zu $\mathcal{M}$ eine Standard-DTM $\mathcal{M}'$, die so rechnet:

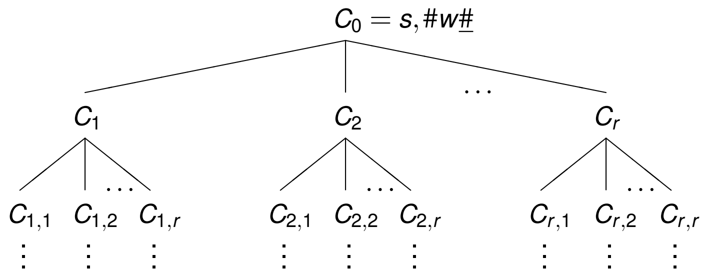
- $\mathcal{M}'$ durchläuft systematisch **alle** Rechnungen von $\mathcal{M}$, und sucht dabei nach einer Haltekonfiguration.
- $\mathcal{M}'$ genau dann, wenn sie eine Haltekonfiguration von $\mathcal{M}$ findet.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Suchbaum, Rechnungsbaum:
Stelle alle Rechnungen von $\mathcal{M}$ von einer Startkonfiguration C_0 dar als einen Baum mit Wurzel C_0.

Ein Ast ist eine mögliche Rechnung von $\mathcal{M}$.



Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Problem:
Es kann zur Startkonfiguration

$$C_0 = s, \#w\underline{\#}$$

unendlich viele Rechnungen von $\mathcal{M}$ geben,
und jede einzelne von ihnen kann unendlich lang sein.

Wir können also nicht erst einen Ast ganz durchlaufen und dann den nächsten Ast durchsuchen.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Die Lösung:
Breitensuche

Drchlaufe den Rechnungsbaum nicht depth-first, sondern per **iterative deepening**.

- Untersuchen alle möglichen Rechnungen bis zum ersten Schritt.
- Untersuchen alle möglichen Rechnungen bis zum zweiten Schritt.
- Untersuchen alle möglichen Rechnungen bis zum dritten Schritt.
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Können wir damit denn in endlicher Zeit eine Haltekonfiguration finden, falls es eine gibt?

Problem:
Kann der Rechnungsbaum nicht nur **unendlich tief**,
sondern auch **unendlich breit** werden?

Nein, denn:
Maximale Anzahl von Nachfolgekonfigurationen

$$r = max\{|\Delta(q,a)| \quad | \quad q \in K, a \in \Sigma\}$$

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

$\mathcal{M}'$ kann (z.B.) als eine 3-DTM gewählt werden:

- **Auf dem ersten Band steht immer das Eingabewort w.**
  Da die Rechnung immer wieder neu mit $s, \#w\underline{\#}$ von $\mathcal{M}$ beginnt, wird das Eingabewort immer wieder gebraucht.
- **Auf dem zweiten Band steht, welcher Weg durch den Rechnungsbaum gerade verfolgt wird.**
  Der Einfachheit halber: Wenn eine Konfiguration weniger als r Nachfolgekonfigurationen hat, soll der zugehörige Knoten trotzdem r Söhne haben, und die überzähligen Konfigurationen sind leer.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Darstellung des aktuellen Pfades im Rechnungsbaum als Zahl im r-adischen System.

Eine Zahl $d_1 \dots d_n$ bedeutet:

- Von der Startkonfiguration C_0 aus ist die d_1-te der r möglichen Nachfolgekonfigurationen gewählt worden, C_{d_1}.
- Von C_{d_1}, einem Knoten der Tiefe 1, aus wurde die d_2-te mögliche Nachfolgekonfiguration gewählt,
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Ausführung des Iterative Deepening:

- Beginne mit 0 auf zweitem Band.
- Jeweils nächste zu betrachtende Rechnung erhöhen der Zahl auf Band 2 um 1
- Auf Band 3 wird eine Rechnung von $\mathcal{M}$ **determiniert** simuliert.
  Und zwar entsprechend der Zahl $d_1 \dots d_n$ auf Band 2.
  Die Endkonfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ dieser Rechnung steht im Rechnungsbaum an dem Knoten, der das Ende des Pfades $d_1 \dots d_n$ bildet.
- Ist die Konfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ eine Haltekonfiguration, so hält $\mathcal{M}'$.
- Sonst Zahl auf Band 2 erhöhen und die nächste Rechnungssimulation beginnen

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Ende)

Damit gilt:

$\mathcal{M}'$ hält bei Input w

<u>gdw</u>

es gibt in R_{C_0} eine Haltekonfiguration.

Das ist genau dann der Fall, wenn

- $\mathcal{M}$ bei Input w hält,
- w in L liegt.

$\square$

Teil V

Turing Maschinen

Universelle Turing-Maschine

Vergleich Turing-Maschine / „normaler" Computer

Turing-Maschinen sind sehr mächtig.
Wie mächtig sind sie wirklich?

- Eine Turing-Maschine hat eine vorgegebenes „Programm" (Regelmenge)
- „Normale" Computer können beliebige Programme ausführen.

Tatsächlich geht das mit Turing-Maschinen auch!

Universelle Turing-Maschine

Turing-Maschine, die andere TMen simuliert

- Universelle TM $\mathcal{U}$ bekommt als Eingabe:
  - die Regelmenge einer beliebigen Turing-Maschine $\mathcal{M}$ und
  - ein Wort w, auf dem $\mathcal{M}$ rechnen soll.
- $\mathcal{U}$ simuliert $\mathcal{M}$, indem sie jeweils nachschlägt, welchen δ-Übergang $\mathcal{M}$ machen würde.

Universelle Turing-Maschine

TM als Eingabe für eine andere TM

Frage:
In welches Format fasst man die Regeln einer DTM $\mathcal{M}$ am besten, um sie einer universellen DTM als Eingabe zu geben?

Was muss man angeben, um eine DTM komplett zu beschreiben?

- das Alphabet,
- die Zustände,
- die δ-Übergänge
- den Startzustand.

Universelle Turing-Maschine

Standardisierung von Alphabet, Zustandsmenge, Startzustand

- Unendliches Alphabet $\Sigma_\infty = \{a_0, a_1, \dots\}$, so daß das Alphabet jeder DTM eine Teilmenge von Σ_∞ ist.
- Namen der Zustände einer DTM sind egal. Sie seien also $q_1, \dots, q_n$ (n kann dabei von DTM zu DTM verschieden sein).
- Sei q_1 immer der Startzustand, und bezeichne q_0 den Haltezustand

Damit:

Wir können eine DTM komplett beschreiben, indem wir nur ihre δ-Übergänge beschreiben.

Universelle Turing-Maschine

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation

Die DTM $\mathcal{L}_\#$ habe die Regeln

$$\begin{array}{ll} q_1, \# \mapsto q_2, L & q_2, \# \mapsto h, \# \\ q_1, | \mapsto q_2, L & q_2, | \mapsto q_2, L \end{array}$$

Dabei sei: $\# = a_0$ und $| = a_1$

Dann kann die DTM $\mathcal{L}_\#$ so beschrieben werden:

	a_0	a_1
q_1	q_2, L	q_2, L
q_2	h, a_0	q_2, L

oder kürzer:

$Z\ S\ 2\lambda\ S\ 2\lambda$
$Z\ S\ 00\ S\ 2\lambda$

Universelle Turing-Maschine

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation

Dabei steht:

- Z für "nächste Zeile"
- S für "nächste Spalte"
- λ für "links", ρ für "rechts"
- die Zahl n für den n-ten Zustand und für das n-te Zeichen von Σ_∞.

Damit ist die DTM insgesamt durch ein einziges Wort beschrieben:

$$ZS2\lambda S2\lambda ZS00S2\lambda$$

Universelle Turing-Maschine

Gödelisierung

Ein Verfahren, jeder Turing-Maschine eine Zahl oder ein Wort (**Gödelzahl** bzw. **Gödelwort**) so zuzuordnen, daß man aus der Zahl bzw. dem Wort die Turing-Maschine effektiv rekonstruieren kann.

Kurt Gödel

Kurt Gödel ⋆ 1906, † 1978

- Bedeutendster Logiker des 20. Jahrhunderts
- Vollständigkeitssatz (1929)
  Promotion in Wien
- Unvollständigkeitssatz (1931)
  Idee er Gödilisierung
- Beweis der Unabhängigkeit der Kontinuuemshypothese
- Dozent in Princeton,
  befreundet mit Albert Einstein
- Tragischer Tod:
  Verfolgungswahn, Depressionen,
  Tod durch Unterernährung.

Teil V

Turing Maschinen

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Akzeptieren

Eine DTM **akzeptiert** eine Sprache L, wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ irgendwann hält
- für jedes Wort $v \notin L$ unendlich lang rechnet oder hängt

Entscheiden

Eine DTM **entscheidet** eine Sprache L, wenn sie

- für jedes Eingabe-Wort $w \in L$ hält mit dem Bandinhalt Y (“Yes”)
- für jedes Wort $v \notin L$ hält mit dem Bandinhalt N (“No”)

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition 13.1 (Entscheidbar)

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (\ K, \Sigma, \delta, s\ )$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

M **entscheidet** L, falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$$s, \#w\underline{\#} \vdash_M^* \begin{cases} h, \#Y\underline{\#} & \text{falls } w \in L \\ h, \#N\underline{\#} & \text{sonst} \end{cases}$$

L heißt **entscheidbar**, falls es eine DTM gibt, die L entscheidet.

Akzeptierbarkeit und Entscheidbarkeit

Definition 13.2 (Akzeptierbar)

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

$\mathcal{M}$ **akzeptiert** ein Wort $w \in \Sigma_0^*$,
falls $\mathcal{M}$ bei Input w hält.

$\mathcal{M}$ **akzeptiert die Sprache** L, falls für alle $w \in \Sigma_0^*$ gilt:

$\mathcal{M}$ akzeptiert w *genau dann wenn* $w \in L$

L heißt **akzeptierbar** (oder auch **semi-entscheidbar**),
falls es eine DTM gibt, die L akzeptiert.

Rekursiv aufzählbar

Definition 13.3 (Rekursiv Aufzählbar (recursively enumerable))

L sei eine Sprache über Σ_0 mit $\#, N, Y \notin \Sigma_0$.

$M = (K, \Sigma, \delta, s)$ sei eine DTM mit $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

$\mathcal{M}$ **zählt** L **auf**, falls es einen Zustand $q_B \in K$ gibt (den **Blinkzustand**), so daß:

$$L = \{w \in \Sigma_0^* \mid \exists u \in \Sigma^* : s, \underline{\#} \vdash_{\mathcal{M}}^* q_B, \#w\underline{\#}u\}$$

L heißt **rekursiv aufzählbar**, falls es eine DTM gibt, die L aufzählt.

Rekursiv aufzählbar

Achtung: aufzählbar $\neq$ abzählbar.

Unterschied

M **abzählbar:** Es gibt eine surjektive Abbildung der natürlichen Zahlen auf M

M **aufzählbar:** Diese Abbildung kann von einer Turing-Maschine berechnet werden.

Wegen Endlichkeit der Wörter und des Alphabets sind alle Sprachen abzählbar.
Aber nicht alle Sprachen sind aufzählbar.

Rekursiv aufzählbar: Beispiele

Beispiel 13.4 (Rekursiv aufzählbar aber nicht entscheidbar)

Folgende Mengen sind rekursiv aufzählbar aber *nicht* entscheidbar:

- Die Menge der Gödelisierungen aller haltenden Turing-Maschinen
- Die Menge aller terminierenden Programme
- Die Menge aller allgemeingültigen prädikatenlogischen Formeln

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Satz 13.5 (Akzeptierbar = Rekursiv Aufzählbar)

Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie akzeptierbar ist.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis

"$\Rightarrow$"

Sei L rekursiv aufzählbar

Es gibt also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L aufzählt.

Zu zeigen: L ist akzeptierbar.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wir konstruieren aus $\mathcal{M}_L$ eine 2-DTM $\mathcal{M}$, die L akzeptiert:

- $\mathcal{M}$ wird gestartet mit
$$s_0, \quad \begin{array}{l} \#w\underline{\#} \\ \underline{\#} \end{array}$$
- $\mathcal{M}$ simuliert auf Band 2 die Maschine $\mathcal{M}_L$.
- Wenn $\mathcal{M}_L$ den **Blinkzustand** q_B erreicht, dann enthält Band 2 von $\mathcal{M}$ ein Wort
$$\#w'\underline{\#}u$$
mit $w' \in L$.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

- Nach erreichen des Blinkzustands:
  $\mathcal{M}$ vergleicht w und w'.
  - Falls $w = w'$, dann hält $\mathcal{M}$: $w \in L$.
  - Ansonsten simuliert $\mathcal{M}$ auf Band 2 weiter die Arbeit von $\mathcal{M}_L$.
- Wenn $\mathcal{M}_L$ hält, ohne das Wort w auf Band 2 erzeugt zu haben, gerät $\mathcal{M}$ in eine Endlosschleife.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Sei L akzeptierbar
Es gebe also eine DTM $\mathcal{M}_L$, die L akzeptiert.

Zu zeigen: L ist rekursiv aufzählbar.

Wir konstruieren eine DTM $\mathcal{M}$, die L rekursiv aufzählt.

Grundidee:

- die Wörter aus Σ^* der Reihe nach aufzählen
- jedes Wort der Maschine $\mathcal{M}_L$ vorlegen
- wenn $\mathcal{M}_L$ das Wort akzeptiert, in den Blinkzustand q_B gehen

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Problem: $\mathcal{M}_L$ akzeptiert, sie entscheidet nicht.
Wenn $\mathcal{M}_L$ ein Wort nicht akzeptiert, rechnet sie unendlich.

Lösung: Wir betrachten die Rechnung von $\mathcal{M}_L$ zu allen Wörtern aus Σ^* **gleichzeitig**.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

$\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ (in lexikalischer Reihenfolge aufgezählt).

Dann rechnet $\mathcal{M}$ so:

- Im ersten Durchlauf berechne den ersten Rechenschritt von $\mathcal{M}_L$ für w_1.
- Im zweiten Durchlauf berechne
  - die ersten zwei Rechenschritte von $\mathcal{M}_L$ für w_1,
  - einen Rechenschritt für w_2.
- Im dritten Durchlauf berechne drei Rechenschritte für w_1, zwei für w_2 und einen für w_3 und so weiter.

Immer wieder bei der Startkonfiguration anfangen: So müssen wir uns den Bandinhalt der Rechnung von $\mathcal{M}_L$ zu w_i nach j Schritten nicht merken.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Fortsetzung)

Wenn $\mathcal{M}$ so rechnet, dann gilt:

- $\mathcal{M}$ fängt für jedes $w_i \in \Sigma^*$ in endlicher Zeit (nämlich im i-ten Durchlauf) an, die Arbeit von $\mathcal{M}_L$ zu w_i zu simulieren, und
- falls $w_i \in L$ und falls $\mathcal{M}_L$, gestartet mit $s, \#w_i\underline{\#}$, in j Schritten einen Haltezustand erreicht, dann erreicht $\mathcal{M}$ nach endlicher Zeit (nämlich im $i + j$-ten Durchlauf) den Haltezustand von $\mathcal{M}_L$ in der Rechnung zu w_i.

Akzeptierbar gleich rekursiv aufzählbar

Beweis (Ende)

- Wenn $\mathcal{M}$ bei Simulation von $\mathcal{M}_L$ zur Eingaben w_i auf eine Haltekonfiguration trifft, dann ist $w_i \in L$.
- $\mathcal{M}$ nimmt dann eine Konfiguration

$$q_B, \#w_i\underline{\#}u_i$$

ein – q_B ist der Blinkzustand.
- In der Nebenrechnung u_i steht, welche Teilrechnung von $\mathcal{M}_L$ als nächste zu simulieren ist.

Also zählt $\mathcal{M}$ die $w \in \Sigma^*$ auf, für die $\mathcal{M}_L$ hält, und das sind gerade die $w \in L$. □

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Satz 13.6 (Entscheidbar und akzeptierbar)

Jede entscheidbare Sprache ist akzeptierbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird L akzeptiert von der DTM $\mathcal{M}'$,
die zunächst $\mathcal{M}$ simuliert und danach in eine Endlosschleife geht, falls $\mathcal{M}$ mit $h, \#N\underline{\#}$ endet.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Satz 13.7 (Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar)

Das Komplement einer entscheidbaren Sprache ist entscheidbar.

Beweis

Sei L eine entscheidbare Sprache und $\mathcal{M}$ eine DTM, die L entscheidet.

Dann wird $\overline{L}$ entschieden von einer DTM $\mathcal{M}'$,
die genau wie $\mathcal{M}$ rechnet
und nur am Schluß die Antworten Y und N vertauscht. □

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Satz 13.8 (Charakterisierung von Entscheidbarkeit)

Eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sie und ihr Komplement akzeptierbar sind.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis

"$\Rightarrow$"

Sei L ist entscheidbar.
Zu zeigen: L und $\overline{L}$ sind akzeptierbar.

- L ist entscheidbar, also ist L akzeptierbar
- L ist entscheidbar, also ist $\overline{L}$ entscheidbar
- $\overline{L}$ ist entscheidbar, also ist $\overline{L}$ akzeptierbar

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Fortsetzung)

"$\Leftarrow$"

Seien L und $\overline{L}$ akzeptierbar.
Zu zeigen: L ist entscheidbar.

- Sei $\mathcal{M}_1$ eine DTM, die L akzeptiert.
- Sei $\mathcal{M}_2$ eine DTM, die $\overline{L}$ akzeptiert.

Daraus konstruieren wir eine 2-DTM $\mathcal{M}$, die L entscheidet:

- $\mathcal{M}$ wird gestartet mit

$$\begin{array}{l} s_0, \#w\underline{\#} \\ \underline{\#} \end{array}$$

- $\mathcal{M}$ kopiert w auf Band 2.

Entscheidbarkeit und Akzeptierbarkeit

Beweis (Ende)

- M simuliert abwechselnd
  - einen Schritt von $\mathcal{M}_1$ auf Band 1 und
  - einen Schritt von $\mathcal{M}_2$ auf Band 2.
- Das tut $\mathcal{M}$, bis entweder $\mathcal{M}_1$ oder $\mathcal{M}_2$ hält.
- Eine von beiden muss halten: w gehört entweder zu L oder zu $\overline{L}$.
- Wenn $\mathcal{M}_1$ hält, dann hält $\mathcal{M}$ mit
  - $\#Y\underline{\#}$ auf Band 1 und
  - $\underline{\#}$ auf Band 2.
- Wenn $\mathcal{M}_2$ hält, dann hält $\mathcal{M}$ mit
  - $\#N\underline{\#}$ auf Band 1 und
  - $\underline{\#}$ auf Band 2.

$\square$

Teil V

Turing Maschinen

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Zur Erinnerung

Formale Sprachen sind vom **Typ 0**, wenn sie durch beliebige Grammatiken (keinerlei Einschränkungen) erzeugt werden können.

Rekursiv Aufzählbar = Typ 0

Satz 14.1 (Rekursiv aufzählbar = Typ 0)

Die rekursiv aufzählbaren Sprachen
(also die durch DTMn akzeptierbaren Sprachen)
sind genau die durch beliebige Grammatiken erzeugten Sprachen
(also die vom Typ 0).

Beweisidee

- Zu jeder Turing-Maschine kann eine Grammatik konstruiert werden, deren Ableitungsschritte die Rechenschritte der TM simulieren (spezielle Variable markiert Position des Schreib-/Lesekopfes).
- Zu jeder Grammatik kann eine indeterminierte Turing-Maschine (und damit auch eine DTM) konstruiert werden, deren Rechenschritte den Ableitungsschritten der Grammatik entsprechen.

Teil V

Turing Maschinen

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion: Busy Beaver

Definition 15.1 (Busy Beaver)

Die Funktion $BB : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert

$n \mapsto f(n) :=$ die maximale Anzahl an Einsen, die eine **haltende** DTM mit maximal n Zuständen auf einem leeren Band erzeugen kann

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion: Busy Beaver

BB wächst extrem schnell

Exakte Werte von $BB(n)$ für $n \geq 4$ nicht bekannt.

- $BB(4) \geq 4098$
- $BB(5) \geq 1,29 * 10^{865}$

Theorem 15.2 (BB ist nicht berechenbar)

BB wächst zu stark um berechenbar zu sein:
Es gibt keine DTM, die BB berechnet.

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion: Busy Beaver

Beweis (erster Teil)

Man kann immer mindestens ein $|$ mehr erzeugen, wenn man einen weiteren Zustand zur Verfügung hat:

- man benennt den Haltezustand um in q_{neu} und geht in den richtigen Haltezustand h nur, wenn man in q_{neu} ein Blank # gelesen hat. Zusätzlich ersetzt man das Blank durch $|$).
- Wenn man ein $|$ liest, geht man nach rechts und bleibt in q_{neu}.

Damit haben wir bewiesen:

***BB* wächst streng monoton.**

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion: Busy Beaver

Beweis (zweiter Teil)

Angenommen, es gäbe eine DTM $\mathcal{BB}$, die BB berechnet.
Sie habe n_0 Zustände.

Wir betrachten folgende zusammengesetzten Maschine:

- zuerst schreibt sie m Einsen auf das leere Band
- dann führt sie $\mathcal{BB}$ aus

Diese Maschine kommt mit $n_0 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 10$ Zuständen aus

Sei nun m so groß, dass

$$m > n_0 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 10$$

Dann schreibt die neue Maschine $BB(m)$ Einsen auf das Band und arbeitet mit streng weniger als m Zuständen: Widerspruch. $\square$

Beispiel einer nicht berechenbaren Funktion: Busy Beaver

Intuitive Ursache des Widerspruchs

$\mathcal{BB}$ selbst hat fixe Größe,

Sie muss mehr Einsen schreiben können als jede Maschine ihrer Größe.

Also muss sie insbesondere mehr Einsen schreiben als sie selbst

Widerspruch

Göderlisierung von DTMs

Definition 15.3 (Göderlnummern von DTMs)

DTMn werden als Gödelzahlen kodiert:

- DTMs können als Gödelwörter dargestellt werden.
- Die Buchstaben der Gödelwörter können in Ziffern kodiert wrden, um Gödelnummern zu bekommen.
- Notation: $\hat{g}(\mathcal{M})$ für die Gödelnummer der DTM $\mathcal{M}$.

Göderlisierung von DTMs

Definition 15.4 (Jede Zahl ist Gödelnummer)

Jede natürliche Zahl n soll Gödelnummer einer DTM $\mathcal{M}_n$ sein.

Wir definieren

$$\mathcal{M}_n := \begin{cases} \mathcal{M}, & \text{falls } \hat{g}(\mathcal{M}) = n \\ \mathcal{M}_{halt} & \text{falls } \nexists \mathcal{M} \;\; \hat{g}(\mathcal{M}) = n \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{halt}$ ist eine TM, die sofort anhält und weiter nichts tut.

Halteproblem

Definition 15.5 (Allgemeines Halteproblem)

Das **allgemeine Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei Eingabe i hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H}_{allg} := \{\langle n, i\rangle \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } i\}.$$

Halteproblem

Definition 15.6 (Spezielles Halteproblem)

Das **spezielle Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei Eingabe n hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n\}.$$

Halteproblem

Definition 15.7 (Null-Halteproblem)

Das **Null-Halteproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei leerer Eingabe hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{H}_0 := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei leerer Eingabe}\}$$

Manchmal auch:
"bei Eingabe 0" anstatt "bei leerer Eingabe".

Leerheitsproblem

Definition 15.8 (Leerheitsproblem)

Das **Leerheitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei keiner Eingabe aus Σ^* hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei keiner Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

Totalitätsproblem

Definition 15.9 (Totalitätsproblem)

Das **Totalitätsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n bei jeder Eingabe aus Σ^* hält.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{T} := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei jeder Eingabe aus } \Sigma^*\}.$$

Gleichheitsproblem

Definition 15.10 (Gleichheitsproblem)

Das **Gleichheitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n die gleiche Sprache über Σ akzeptiert wie die DTM mit Gödelnummer m.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E}q := \{\langle n, m\rangle \mid \begin{array}{l}\mathcal{M}_n \text{ akzeptiert die gleiche} \\ \text{Sprache über } \Sigma \text{ wie } \mathcal{M}_m\end{array}\}.$$

Entscheidbarkeitsproblem

Definition 15.11 (Entscheidbarkeitsproblem)

Das **Entscheidbarkeitsproblem** ist die Frage, ob die DTM mit Gödelnummer n eine entscheidbare Sprache über Σ akzeptiert.

Es entspricht der Sprache

$$\mathcal{E}nt := \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ akzeptiert eine entscheidbare Sprache über } \Sigma\}.$$

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Satz 15.12 (Halteproblem ist unentscheidbar)

Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H}$ ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Beweis (A. Turing)

Beweis durch Widerspruch mit einem **Diagonalisierungsargument**.

Angenommen, es gebe eine DTM $\mathcal{H}$,
die das spezielle Halteproblem entscheidet.

Konstruiere eine neue Maschine aus $\mathcal{H}$:

- Wenn $\mathcal{H}$ „Y“ antwortet,
  geht sie in eine Endlosschleife (termniniert nicht).
- Wenn $\mathcal{M}_n$ „N“ antwortet,
  terminiert sie.

Die neue Maschine habe Gödelnummer n.

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Beweis (A. Turing), Forts.

Was macht $\mathcal{M}_n$ bei Eingabe n?

- Falls $\mathcal{M}_n$ bei Eingabe n terminiert,
  dann antwortet $\mathcal{H}$ auf Eingabe n mit „N“,
  dann terminiert $\mathcal{M}_n$ auf Eingabe von n nicht
  Widerspruch!
- Falls $\mathcal{M}_n$ bei Eingabe n nicht terminiert,
  dann antwortet $\mathcal{H}$ auf Eingabe n mit „Y“,
  dann terminiert $\mathcal{M}_n$ auf Eingabe von n
  Widerspruch!

Akzeptierbarkeit des Halteproblems

Satz 15.13 (Akzeptierbarkeit von $\mathcal{H}$)

Das spezielle Halteproblem $\mathcal{H}$ ist aufzählbar. D. h. die Sprache

$$\mathcal{H} = \{ n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } n \}$$

ist akzeptierbar.

Beweis

Akzeptieren durch Simulation von $\mathcal{M}_n$ mit Hilfe der universellen DTM.

Korollar

Das Komplement von $\mathcal{H}$ ist nicht aufzählbar.

Reduktion von Problemen

Wie zeigt man, daß ein Problem unentscheidbar ist?

Reduktion (informell)

Wir geben eine **totale, berechenbare Funktion** f angeben, die

- eine Instanz p_1 von P_1
- in eine Instanz p_2 von P_2 umwandelt,
- und zwar so, daß die Antwort zu p_1 „ja“ ist gdw die Antwort zu p_2 „ja“ ist.

Reduktion von Problemen

Definition 15.14 (Reduktion)

Seien L_1, L_2 Sprachen über $\mathbb{N}$.

L_1 wird auf L_2 reduziert,

$$L_1 \preceq L_2$$

gdw

es gibt eine TM-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \big(n \in L_1 \text{ gdw } f(n) \in L_2 \big).$$

Reduktion von Problemen

Lemma 15.15

Ist $L_1 \preceq L_2$, und ist L_1 ***unentscheidbar****, so ist auch L_2* ***unentscheidbar****.*

Reduktion von Problemen

Beweis.

- Angenommen, L_2 ist entscheidbar.
- Sei $\mathcal{M}_2$ eine Turing-Maschine, die L_2 entscheidet.
- Wegen $L_1 \preceq L_2$ gibt es eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in TM$ mit $n \in L_1$ gdw $f(n) \in L_2$.
- Sei $\mathcal{M}_f$ eine DTM, die f berechnet.
- Dann kann man daraus die Maschine $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_f\mathcal{M}_2$ konstruieren, für die gilt:
  - $\mathcal{M}_1$, gestartet mit Input n, hält mit $h, \#Y\underline{\#}$, falls $f(n) \in L_2$, d.h. wenn $n \in L_1$ ist.
  - $\mathcal{M}_1$, gestartet mit Input n, hält mit $h, \#N\underline{\#}$, falls $f(n) \notin L_2$, d.h. wenn $n \notin L_1$ ist.
- Die Maschine $\mathcal{M}_1$ entscheidet also L_1, ein Widerspruch.

□

Unentscheidbarkeit

Satz 15.16 (Unentscheidbarkeit von $\mathcal{H}_0$)

Das Null-Halteproblem

$$\mathcal{H}_0 = \{n \mid \mathcal{M}_n \text{ hält bei Eingabe } 0\}$$

ist unentscheidbar.

Unentscheidbarkeit

Beweis

Gegeben eine TM $\mathcal{M}_n$.

Kombiniere diese mit einer DTM, die n aufs Band schreibt.

$f(n)$ sei definiert als die Gödelnummer dieser neuen Maschine.

$\mathcal{M}_{f(n)}$ terminiert auf Eingabe von 0
gdw
$\mathcal{M}_n$ terminiert auf Eingabe von n

Damit:
Reduktion des speziellen Halteproblems auf das Null-Halteproblem.
(f ist total und berechenbar!)

Also:
Unentscheidbarkeit des Null-Halteproblems folgt aus
Unentscheidbarkeit des speziellen Halteproblems

Unentscheidbarkeit

Weitere unentscheidbare Probleme

Ähnlich kann man per Reduktion die Unentscheidbarkeit der folgenden Probleme zeigen:

- $\mathcal{E}$, das Leerheitsproblem.
- $\mathcal{T}$, das Totalitätsproblem.
- $\mathcal{E}q$, das Gleichheitsproblem.
- $\mathcal{E}nt$, das Entscheidbarkeitsproblem.