

**Vorlesung**

# **Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I**

**Bernhard Beckert**

**Institut für Informatik**



**Sommersemester 2007**

# Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

**Katrin Erk** (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

**Jürgen Dix** (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– *Bernhard Beckert, April 2007*

# Teil II

- 1 Sprache, Grammatik
- 2 Warum Sprachen?
- 3 Die Chomsky-Hierarchie**
- 4 Probleme über Sprachen
- 5 Endlich, unendlich und dann?

# Teil II

- 1 Sprache, Grammatik
- 2 Warum Sprachen?
- 3 Die Chomsky-Hierarchie
- 4 Probleme über Sprachen**
- 5 Endlich, unendlich und dann?

## Interessante Probleme (informell)

- Ist ein gegebenes Wort in einer Sprache (definiert durch eine Grammatik) enthalten?
- Erzeugen zwei gegebene Grammatiken dieselbe Sprache?

Mit welchen Algorithmen können diese Probleme gelöst werden?

## Interessante Probleme (informell)

- Ist ein gegebenes Wort in einer Sprache (definiert durch eine Grammatik) enthalten?
- Erzeugen zwei gegebene Grammatiken dieselbe Sprache?

Mit welchen Algorithmen können diese Probleme gelöst werden?

## Interessante Probleme (informell)

- Ist ein gegebenes Wort in einer Sprache (definiert durch eine Grammatik) enthalten?
- Erzeugen zwei gegebene Grammatiken dieselbe Sprache?

Mit welchen Algorithmen können diese Probleme gelöst werden?

## Interessante Probleme (informell)

- Ist ein gegebenes Wort in einer Sprache (definiert durch eine Grammatik) enthalten?
- Erzeugen zwei gegebene Grammatiken dieselbe Sprache?

Mit welchen Algorithmen können diese Probleme gelöst werden?



## Definition 9.1 (Problem, Algorithmus)

Ein **Problem**  $P$  ist die Frage, ob eine bestimmte Eigenschaft auf gegebene Objekte zutrifft.

Dabei ist eine bekannte, abzählbaren Grundmenge solcher Objekte gegeben.

Für jedes Objekt  $o$  gilt: die Eigenschaft trifft auf  $o$  zu oder nicht.

## Definition 9.2 (Algorithmus)

Ein **Algorithmus** für ein Problem  $P$  ist eine Vorschrift (ein Programm), die zu beliebigem Objekt  $o$  berechnet, ob die Eigenschaft für  $o$  zutrifft oder nicht.

## Definition 9.1 (Problem, Algorithmus)

Ein **Problem**  $P$  ist die Frage, ob eine bestimmte Eigenschaft auf gegebene Objekte zutrifft.

Dabei ist eine bekannte, abzählbaren Grundmenge solcher Objekte gegeben.

Für jedes Objekt  $o$  gilt: die Eigenschaft trifft auf  $o$  zu oder nicht.

## Definition 9.2 (Algorithmus)

Ein **Algorithmus** für ein Problem  $P$  ist eine Vorschrift (ein Programm), die zu beliebigem Objekt  $o$  berechnet, ob die Eigenschaft für  $o$  zutrifft oder nicht.

## Definition 9.1 (Problem, Algorithmus)

Ein **Problem**  $P$  ist die Frage, ob eine bestimmte Eigenschaft auf gegebene Objekte zutrifft.

Dabei ist eine bekannte, abzählbaren Grundmenge solcher Objekte gegeben.

Für jedes Objekt  $o$  gilt: die Eigenschaft trifft auf  $o$  zu oder nicht.

## Definition 9.2 (Algorithmus)

Ein **Algorithmus** für ein Problem  $P$  ist eine Vorschrift (ein Programm), die zu beliebigem Objekt  $o$  berechnet, ob die Eigenschaft für  $o$  zutrifft oder nicht.

## Definition 9.1 (Problem, Algorithmus)

Ein **Problem**  $P$  ist die Frage, ob eine bestimmte Eigenschaft auf gegebene Objekte zutrifft.

Dabei ist eine bekannte, abzählbaren Grundmenge solcher Objekte gegeben.

Für jedes Objekt  $o$  gilt: die Eigenschaft trifft auf  $o$  zu oder nicht.

## Definition 9.2 (Algorithmus)

Ein **Algorithmus** für ein Problem  $P$  ist eine Vorschrift (ein Programm), die zu beliebigem Objekt  $o$  berechnet, ob die Eigenschaft für  $o$  zutrifft oder nicht.

## Beispiel 9.3 (Einige Probleme)

- Für  $n \in \mathbb{N}$ :  
Ist  $n$  eine Primzahl?
- Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  und  
ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$ :  
Gilt  $w \in L(G)$ ?
- Für ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken:  
Ist  $L(G)$  leer (endlich, unendlich)?
- Für  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ :  
Hat  $a^n + b^n = c^n$  eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm  $p$  aus der Menge aller Java-Programme:  
Terminiert  $p$ ?

## Beispiel 9.3 (Einige Probleme)

- Für  $n \in \mathbb{N}$ :  
Ist  $n$  eine Primzahl?
- Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  und  
ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$ :  
Gilt  $w \in L(G)$ ?
- Für ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken:  
Ist  $L(G)$  leer (endlich, unendlich)?
- Für  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ :  
Hat  $a^n + b^n = c^n$  eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm  $p$  aus der Menge aller Java-Programme:  
Terminiert  $p$ ?

## Beispiel 9.3 (Einige Probleme)

- Für  $n \in \mathbb{N}$ :  
Ist  $n$  eine Primzahl?
- Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  und  
ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$ :  
Gilt  $w \in L(G)$ ?
- Für ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken:  
Ist  $L(G)$  leer (endlich, unendlich)?
- Für  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ :  
Hat  $a^n + b^n = c^n$  eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm  $p$  aus der Menge aller Java-Programme:  
Terminiert  $p$ ?

## Beispiel 9.3 (Einige Probleme)

- Für  $n \in \mathbb{N}$ :  
Ist  $n$  eine Primzahl?
- Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  und  
ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$ :  
Gilt  $w \in L(G)$ ?
- Für ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken:  
Ist  $L(G)$  leer (endlich, unendlich)?
- Für  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ :  
Hat  $a^n + b^n = c^n$  eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm  $p$  aus der Menge aller Java-Programme:  
Terminiert  $p$ ?



## Beispiel 9.3 (Einige Probleme)

- Für  $n \in \mathbb{N}$ :  
Ist  $n$  eine Primzahl?
- Für ein Wort  $w \in \Sigma^*$  und  
ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$ :  
Gilt  $w \in L(G)$ ?
- Für ein Element  $G$  aus der Menge aller Grammatiken:  
Ist  $L(G)$  leer (endlich, unendlich)?
- Für  $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ :  
Hat  $a^n + b^n = c^n$  eine Lösung in den natürlichen Zahlen?
- Für ein Programm  $p$  aus der Menge aller Java-Programme:  
Terminiert  $p$ ?

# Teil II

- 1 Sprache, Grammatik
- 2 Warum Sprachen?
- 3 Die Chomsky-Hierarchie
- 4 Probleme über Sprachen**
- 5 Endlich, unendlich und dann?

## Teil II

- 1 Sprache, Grammatik
- 2 Warum Sprachen?
- 3 Die Chomsky-Hierarchie
- 4 Probleme über Sprachen
- 5 Endlich, unendlich und dann?**

## Definition 10.1 (Abzählbarkeit)

Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar**, wenn

- es eine **surjektive** Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$$

gibt,

- oder  $M$  leer ist.

## Intuition

Eine Menge ist abzählbar, wenn sie höchstens so mächtig wie  $\mathbb{N}_0$  ist.

## Definition 10.1 (Abzählbarkeit)

Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar**, wenn

- es eine **surjektive** Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$$

gibt,

- oder  $M$  leer ist.

## Intuition

Eine Menge ist abzählbar, wenn sie höchstens so mächtig wie  $\mathbb{N}_0$  ist.

## Definition 10.1 (Abzählbarkeit)

Eine Menge  $M$  heißt **abzählbar**, wenn

- es eine **surjektive** Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow M$$

gibt,

- oder  $M$  leer ist.

## Intuition

Eine Menge ist abzählbar, wenn sie höchstens so mächtig wie  $\mathbb{N}_0$  ist.

## Lemma 10.2

Eine Menge  $M$  ist abzählbar, wenn es eine *injektive* Funktion

$$f : M \rightarrow \mathbb{N}_0$$

*gibt.*

## Beispiel 10.3

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen



## Beispiel 10.3

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

## Beispiel 10.3

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}$
- **alle endlichen Mengen**
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

## Beispiel 10.3

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

## Beispiel 10.3

Abzählbar sind:

- $\mathbb{N}_0$
- $\mathbb{Q}$
- alle endlichen Mengen
- die Vereinigung zweier abzählbarer Mengen
- die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen

## David Hilbert ★ 1862, † 1943

- Einer der bedeutendsten und einflußreichsten Mathematiker aller Zeiten
- Professor in Königsberg und Göttingen
- Wichtige Beiträge zu
  - Logik
  - Funktionalanalysis
  - Zahlentheorie
  - Mathematische Grundlagen der Physik
  - uvm.



## David Hilbert ★ 1862, † 1943

- Einer der bedeutendsten und einflußreichsten Mathematiker aller Zeiten
- **Professor in Königsberg und Göttingen**
- Wichtige Beiträge zu
  - Logik
  - Funktionalanalysis
  - Zahlentheorie
  - Mathematische Grundlagen der Physik
  - uvm.



## David Hilbert ★ 1862, † 1943

- Einer der bedeutendsten und einflußreichsten Mathematiker aller Zeiten
- Professor in Königsberg und Göttingen
- **Wichtige Beiträge zu**
  - Logik
  - Funktionalanalysis
  - Zahlentheorie
  - Mathematische Grundlagen der Physik
  - uvm.



# Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

## Theorem 10.4

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist überabzählbar.

### Beweis.

Wir zeigen, dass schon das Intervall  $[0, 1]$  überabzählbar ist.

Annahme: Es gibt eine Aufzählung, also eine surjektive Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1]$$

Dann sei

$$f(i) = 0, d_0^i d_1^i d_2^i \dots$$

die Dezimaldarstellung der  $i$ -ten reellen Zahl. □



# Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

## Theorem 10.4

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen ist überabzählbar.

### Beweis.

Wir zeigen, dass schon das Intervall  $[0, 1]$  überabzählbar ist.

Annahme: Es gibt eine Aufzählung, also eine surjektive Funktion

$$f : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1]$$

Dann sei

$$f(i) = 0, d_0^i d_1^i d_2^i \dots$$

die Dezimaldarstellung der  $i$ -ten reellen Zahl. □

# Diagonalisierungsargument für Überabzählbarkeit

## Beweis.

Fortsetzung:

Wir definieren eine neue Zahl  $d = 0, \bar{d}_0 \bar{d}_1 \bar{d}_2 \dots$  durch

$$\bar{d}_n = \begin{cases} d_n^n + 1 & \text{falls } d_n^n < 9 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$d$  unterscheidet sich in der  $n$ -ten Stelle von  $d_n$ .

Also  $d \neq d_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$

Also kommt  $d$  in der Aufzählung nicht vor. Widerspruch! □

# Wieviele gibt es?

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten

- Endlich viele
- Unendlich viele
- Abzählbar viele
- Überabzählbar viele
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

# Wieviele gibt es?

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten

- **Endlich viele**
- Unendlich viele
- Abzählbar viele
- Überabzählbar viele
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

# Wieviele gibt es?

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten

- Endlich viele
- **Unendlich viele**
- Abzählbar viele
- Überabzählbar viele
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

# Wieviele gibt es?

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten

- Endlich viele
- Unendlich viele
- **Abzählbar viele**
- Überabzählbar viele
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

# Wieviele gibt es?

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten

- Endlich viele
- Unendlich viele
- Abzählbar viele
- **Überabzählbar viele**
- Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde

# Wieviele gibt es?

## Wieviele

- Grammatiken
  - Sprachen
  - Algorithmen
- gibt es überhaupt?

## Mögliche Antworten

- Endlich viele
- Unendlich viele
- Abzählbar viele
- Überabzählbar viele
- **Nicht klar für Algorithmen, da dieser Begriff nicht genau definiert wurde**



# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

## Lemma 10.5

*Gegeben: Signatur  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich  
Dann ist  $\Sigma^*$  abzählbar unendlich.*

### Beweis.

$\Sigma$  ist abzählbar, also ist  $\Sigma^i$  abzählbar,  $i \in \mathbb{N}$ .

$\Sigma^*$  ist die Vereinigung der abzählbar vielen abzählbaren Mengen  $\Sigma^i$ . □

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

## Lemma 10.5

*Gegeben: Signatur  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich  
Dann ist  $\Sigma^*$  abzählbar unendlich.*

## Beweis.

$\Sigma$  ist abzählbar, also ist  $\Sigma^i$  abzählbar,  $i \in \mathbb{N}$ .

$\Sigma^*$  ist die Vereinigung der abzählbar vielen abzählbaren Mengen  $\Sigma^i$ . □

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

## Lemma 10.6

*Gegeben: Signatur  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich*

*Dann ist die Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$  abzählbar unendlich*

### Beweis.

Grammatiken sind endlich und also als Wörter über einer geeigneten erweiterten Grammatik

$$\Sigma \cup V \cup \{\rightarrow, \dots\}$$

darstellbar.

Die Menge der Wörter über dieser erweiterten Grammatik ist abzählbar (Lemma 10.5). □

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

## Lemma 10.6

*Gegeben: Signatur  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich*

*Dann ist die Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$  abzählbar unendlich*

## Beweis.

Grammatiken sind endlich und also als Wörter über einer geeigneten erweiterten Grammatik

$$\Sigma \cup V \cup \{\rightarrow, \dots\}$$

darstellbar.

Die Menge der Wörter über dieser erweiterten Grammatik ist abzählbar (Lemma 10.5). □

# Wieviele Wörter, Grammatiken gibt es?

## Lemma 10.6

*Gegeben: Signatur  $\Sigma$ , endlich oder abzählbar unendlich*

*Dann ist die Menge aller Grammatiken über  $\Sigma$  abzählbar unendlich*

## Beweis.

Grammatiken sind endlich und also als Wörter über einer geeigneten erweiterten Grammatik

$$\Sigma \cup V \cup \{\rightarrow, \dots\}$$

darstellbar.

Die Menge der Wörter über dieser erweiterten Grammatik ist abzählbar (Lemma 10.5). □

# Wieviele Algorithmen gibt es?

## Lemma 10.7

*Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.*

### Beweis.

Algorithmen müssen **per Definition** eine endliche Beschreibung haben.

Sie sind also als Wörter über einer Signatur  $\Sigma$  darstellbar  
(für jedes abzählbare  $\Sigma$ ).

Also sind sie abzählbar (Lemma 10.5).

# Wieviele Algorithmen gibt es?

## Lemma 10.7

*Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.*

## Beweis.

Algorithmen müssen **per Definition** eine endliche Beschreibung haben.

Sie sind also als Wörter über einer Signatur  $\Sigma$  darstellbar  
(für jedes abzählbare  $\Sigma$ ).

Also sind sie abzählbar (Lemma 10.5).

# Wieviele Algorithmen gibt es?

## Lemma 10.7

*Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.*

## Beweis.

Algorithmen müssen **per Definition** eine endliche Beschreibung haben. Sie sind also als Wörter über einer Signatur  $\Sigma$  darstellbar (für jedes abzählbare  $\Sigma$ ).

Also sind sie abzählbar (Lemma 10.5). □



# Wieviele Algorithmen gibt es?

## Lemma 10.7

*Es gibt (nur) abzählbar viele Algorithmen.*

## Beweis.

Algorithmen müssen **per Definition** eine endliche Beschreibung haben.

Sie sind also als Wörter über einer Signatur  $\Sigma$  darstellbar  
(für jedes abzählbare  $\Sigma$ ).

Also sind sie abzählbar (Lemma 10.5). □

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.8

Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

### Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden.

Widerspruch!

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.8

Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

## Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden.

Widerspruch!

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.8

Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

## Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden.

Widerspruch!

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.8

Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

## Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden.

Widerspruch!

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.8

Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ .

## Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden.

Widerspruch!

# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.8

*Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ .*

### Beweis.

Angenommen, es existiere eine Abzählung

$$f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$$

Dann sei

$$C : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \quad \text{mit} \quad C(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$C(i) \neq f_i(i)$$

Also:  $C$  ist von allen  $f_i$  verschieden.

Widerspruch!



# Wieviele Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt es?

## Lemma 10.9

*Es gibt überabzählbar viele Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$ .*

## Beweis.

Analog. □



# Wieviele Sprachen gibt es?

## Lemma 10.10

*Gegeben eine Signatur  $\Sigma$  (endlich oder unendlich).*

*Die Menge der Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.*

## Beweis.

Sei eine beliebige Abzählung aller Wörter über  $\Sigma$  gegeben:

$$w_1, w_2, \dots$$

Dann kann man die Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  mit den Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$  identifizieren, vermittelt

$$f(i) = 1 \quad \text{gdw} \quad w_i \in L$$

Von diesen gibt es überabzählbar viele. □

# Wieviele Sprachen gibt es?

## Lemma 10.10

*Gegeben eine Signatur  $\Sigma$  (endlich oder unendlich).*

*Die Menge der Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.*

## Beweis.

Sei eine beliebige Abzählung aller Wörter über  $\Sigma$  gegeben:

$$w_1, w_2, \dots$$

Dann kann man die Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  mit den Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$  identifizieren, vermittels

$$f(i) = 1 \quad \text{gdw} \quad w_i \in L$$

Von diesen gibt es überabzählbar viele. □

# Wieviele Sprachen gibt es?

## Lemma 10.10

*Gegeben eine Signatur  $\Sigma$  (endlich oder unendlich).*

*Die Menge der Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.*

## Beweis.

Sei eine beliebige Abzählung aller Wörter über  $\Sigma$  gegeben:

$$w_1, w_2, \dots$$

Dann kann man die Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  mit den Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$  identifizieren, vermittels

$$f(i) = 1 \quad \text{gdw} \quad w_i \in L$$

Von diesen gibt es überabzählbar viele. □

# Wieviele Sprachen gibt es?

## Lemma 10.10

*Gegeben eine Signatur  $\Sigma$  (endlich oder unendlich).*

*Die Menge der Sprachen über  $\Sigma$  ist überabzählbar.*

## Beweis.

Sei eine beliebige Abzählung aller Wörter über  $\Sigma$  gegeben:

$$w_1, w_2, \dots$$

Dann kann man die Sprachen  $L$  über  $\Sigma$  mit den Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$  identifizieren, vermittelt

$$f(i) = 1 \quad \text{gdw} \quad w_i \in L$$

Von diesen gibt es überabzählbar viele. □

## Korollar 10.11

*Nicht jede Sprache kann durch eine Grammatik dargestellt werden.*

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$ 
  - Menge aller Wörter
  - Menge aller Grammatiken
  - Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen



# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- Die Menge aller Sprachen

# Zusammenfassung

Gegeben eine Signatur  $\Sigma$

## Abzählbar

- $\mathbb{N}$
- Menge aller Wörter
- Menge aller Grammatiken
- Menge aller Algorithmen

## Überabzählbar

- Die Menge aller Teilmengen von  $\mathbb{N}$
- Die Menge aller reellen Zahlen
- Die Menge aller Funktionen  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  bzw.  $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, 1\}$
- **Die Menge aller Sprachen**