Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Chart-Parsing

Beispiel 7.1

Die Grammatik $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$ mit

$$R = \{\ S \to aSa \mid bSb \mid aa \mid bb\ \}$$

erzeugt die Sprache $\{vv^R \mid v \in \{a, b\}^+\}$

Betrachten wir das Wort $w = abbaabba$.

Was sind mögliche letzte Schritte von Ableitungen, die zu w geführt haben können?

Wir merken uns alle möglichen einzelnen Ableitungsschritte in einer Chart, um Mehrfacharbeit zu vermeiden.

**Wenn das Wort w in der Sprache $L(G)$ ist,
enthält am Ende der Chart eine mit S markierte Kante, die vom ersten bis zum letzten Knoten reicht.**

Chart-Parsing

Beispiel (Forts.)

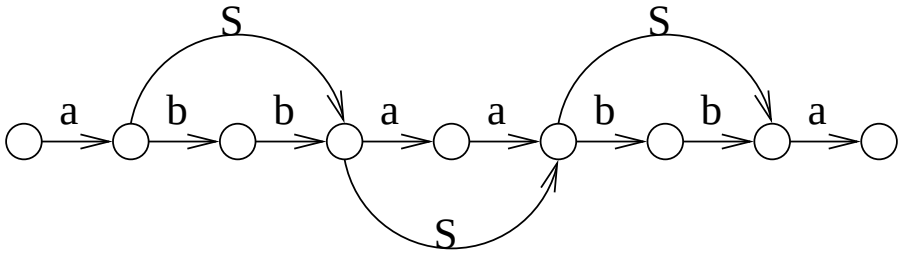


Chart-Parsing

Beispiel (Forts.)

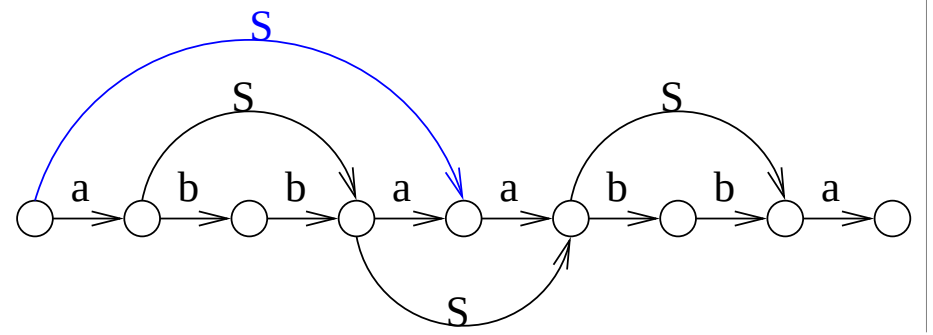


Chart-Parsing

Beispiel (Forts.)

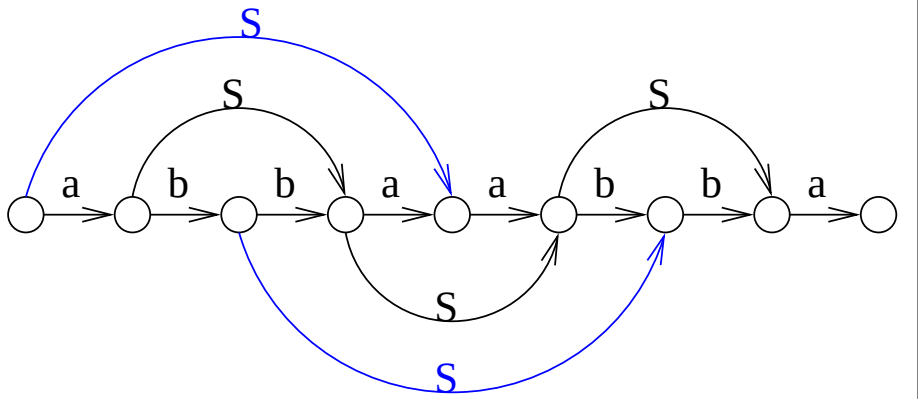


Chart-Parsing

Beispiel (Forts.)

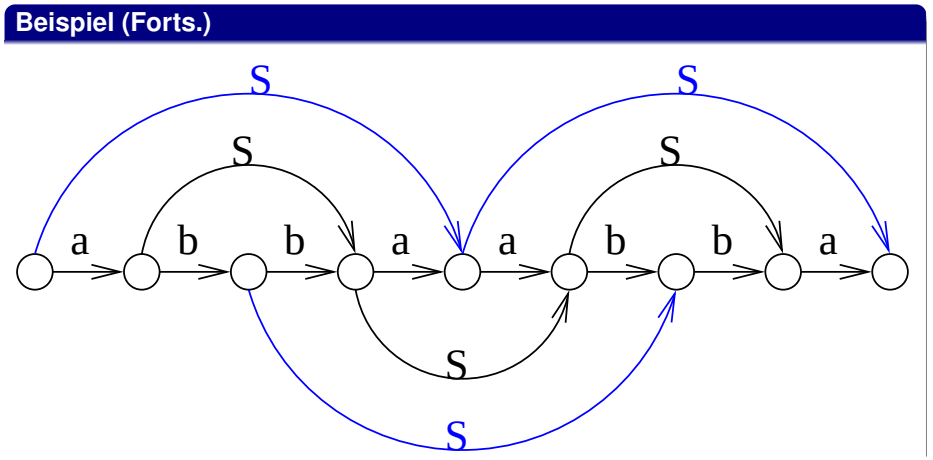
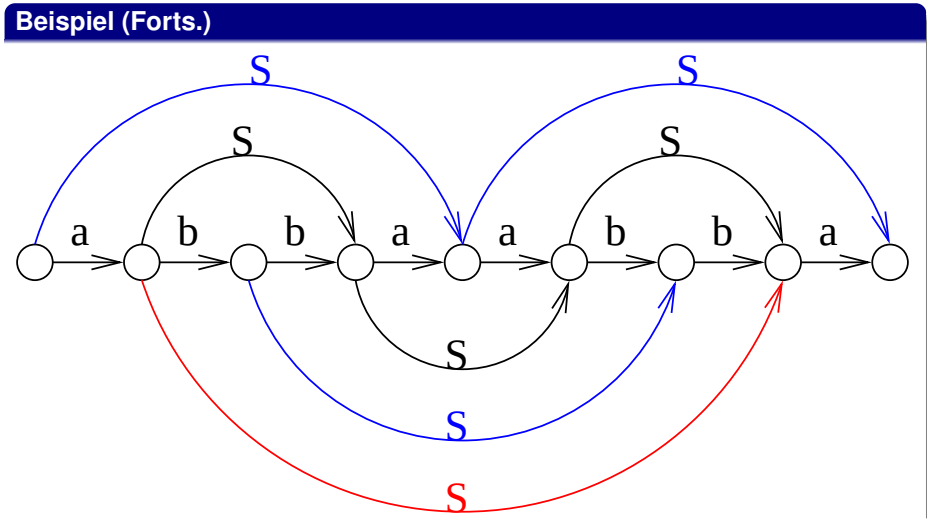
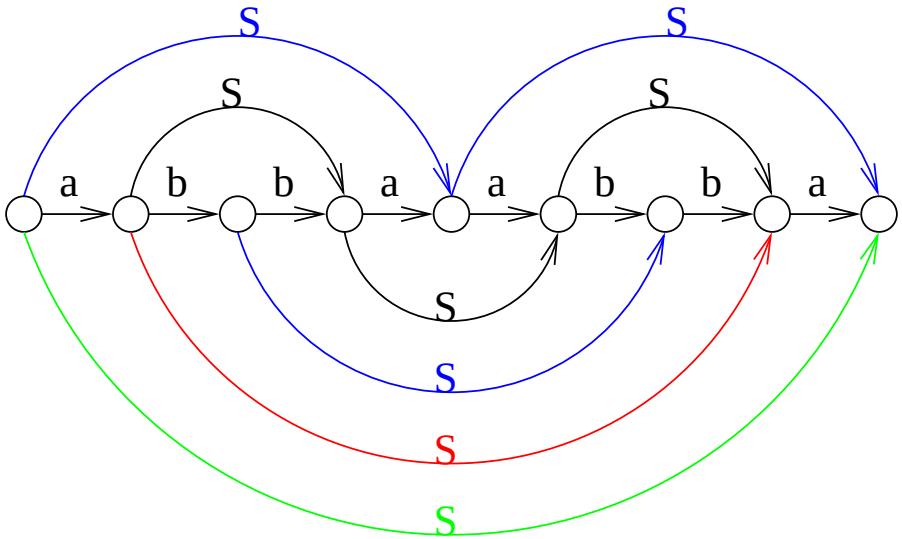


Chart-Parsing

Beispiel (Forts.)



Beispiel (Forts.)



Zur Vereinfachung

Wir fordern:

Grammatik ist in **Chomsky-Normalform**.

Dann:

Immer nur **zwei** benachbarte Kanten betrachten, um herauszufinden, ob darüber eine neue Kante eingefügt werden kann.

Beispiel (Forts.)

Grammatik in CNF, die dieselbe Sprache wie oben erzeugt:
$G = (\{S, S_a, S_b, A, B\}, \{a, b\}, R, S\}$ mit

$$R = \{ \quad S \to AS_a \mid BS_b \mid AA \mid BB$$
$$S_a \to SA$$
$$S_b \to SB$$
$$A \to a$$
$$B \to b\}$$

Darstellung als Array

Für eine Kante, die den i. bis j. Buchstaben überspannt und mit A markiert ist, steht im $[i, j]$-Element des Arrays die Eintragung A.

Definition 7.2 (M ∗ N)

Sei $L = L(G)$ kontextfrei, und $G = (V, T, R, S)$ in Chomsky-Normalform. Mit $M, N \subseteq V$ sei

$$M * N := \{A \in V \mid \exists B \in M, \exists C \in N : \ A \to BC \in R\}$$

Definition 7.3 ($w_{i,j}, V_{i,j}$)

Sei $w = a_1 \dots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$.
Dann:

- $w_{i,j} := a_i \dots a_j$ ist das Infix von w vom i-ten bis zum j-ten Buchstaben
- $V_{i,j} := \{A \in V \mid A \Longrightarrow_G^* w_{i,j}\}$

Lemma 7.4

Sei $w = a_1 \dots a_n$, $a_i \in \Sigma$, d.h. $|w| = n$. Dann gilt:

1. $V_{i,i} = \{A \in V \mid A \to a_i \in R\}$
2. $V_{i,k} = \bigcup_{j=i}^{k-1} V_{i,j} * V_{j+1,k}$ *für* $1 \leq i < k \leq n$

Beachte:
Die Grammatik muss in Chomsky-Normalform sein!

Beweis

1. $V_{i,i} = \{A \in V \mid A \Longrightarrow_G^* a_i\} = \{A \in V \mid A \to a_i \in R\}$, da G in CNF ist.

   $A \in V_{i,k}$ mit $1 \leq i < k \leq n$
   gdw $A \Longrightarrow_G^* a_i \dots a_k$
   gdw $\exists j,\ i \leq j < k :\ \exists B, C \in V : A \Longrightarrow BC$, und
   $B \Longrightarrow_G^* w_{i,j} \neq \varepsilon$
   und $C \Longrightarrow_G^* w_{j+1,k} \neq \varepsilon$ (da G in CNF ist)
   gdw $\exists j,\ i \leq j < k :\ \exists B, C \in V : A \Longrightarrow BC$
   und $B \in V_{i,j}$ und $C \in V_{j+1,k}$
2. gdw $\exists j,\ i \leq j < k : A \in V_{i,j} * V_{j+1,k}$

□

Teil IV

CYK-Algorithmus (Cocke-Younger-Kasami)

Algorithmus

Input sei eine Grammatik G in CNF und ein Wort $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$.

(i) **for** $i := 1$ *to* n **do** `/*Regeln A → a eintragen */`
$V_{i,i} := \{A \in V \mid A \to a_i \in R\}$

(ii) **for** $h := 1$ *to* $n-1$ **do**
for $i := 1$ *to* $n-h$ **do**
$$V_{i,i+h} = \bigcup_{j=i}^{i+h-1} V_{i,j} * V_{j+1,i+h}$$

(iii) **if** $S \in V_{1,n}$ **then return** `Ausgabe` $w \in L(G)$
else return `Ausgabe` $w \notin L(G)$

CYK-Algorithmus (Cocke-Younger-Kasami)

Eigenschaften

Für Wörter der Länge $|w| = n$ entscheidet der CYK-Algorithmus in der Größenordnung von n^3 Schritten, ob $w \in L(G)$ ist.

CYK-Algorithmus (Cocke-Younger-Kasami)

Beispiel 8.1 (CYK)

Eine Grammatik in CNF, die dieselbe Sprache wie oben erzeugt:
$G = (\{S, S_a, S_b, A, B\}, \{a, b\}, R, S\}$

$$R = \{ \quad S \to AS_a \mid BS_b \mid AA \mid BB$$
$$S_a \to SA$$
$$S_b \to SB$$
$$A \to a$$
$$B \to b\}$$

Die Sprache ist: $L(G) = \{vv^R \mid v \in \{a, b\}^+\}$

Aufführlich an der Tafel.