Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Abschlusseigenschaften

Theorem 16.2 (Abschlusseigenschaften von L_3)

Wenn L, L' reguäre Sprachen sind, dann sind auch

- $\overline{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Beweis.

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren. Also sind sie regulär. □

Abschlusseigenschaften

Theorem 16.2 (Abschlusseigenschaften von L_3)

Wenn L, L' reguäre Sprachen sind, dann sind auch

- $\overline{L}$
- $L \cup L'$
- $L \circ L'$
- L^*
- $L \cap L'$

reguläre Sprachen.

Beweis.

Gemäß Lemma existieren Automaten, die diese Sprachen akzeptieren. Also sind sie regulär. □

Wortprobleme

Lemma 16.3

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache L$(\mathcal{A})$

1. *leer ist.*
2. *unendlich ist.*

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Lemma 16.3

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. *leer ist.*
2. *unendlich ist.*

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Lemma 16.3

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. *leer ist.*
2. *unendlich ist.*

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Lemma 16.3

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. *leer ist.*
2. *unendlich ist.*

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Lemma 16.3

Sei $\mathcal{A}$ ein endlicher Automat.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(\mathcal{A})$

1. *leer ist.*
2. *unendlich ist.*

Korollar

Sei G eine rechtslineare Grammatik.
Es ist entscheidbar, ob die Sprache $L(G)$

1. leer ist.
2. unendlich ist.

Wortprobleme

Beweis.

Zu (i): $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer
gdw
Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu (ii): $L(\mathcal{A})$ ist unendlich
gdw
Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen. $\square$

Wortprobleme

Beweis.

Zu (i): $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu (ii): $L(\mathcal{A})$ ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen. □

Wortprobleme

Beweis.

Zu (i): $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu (ii): $L(\mathcal{A})$ ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen. □

Wortprobleme

Beweis.

Zu (i): $L(\mathcal{A})$ ist nicht leer

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand.

Zu (ii): $L(\mathcal{A})$ ist unendlich

gdw

Es gibt einen Weg von einem initialen zu einem finalen Zustand, der einen Zyklus enthält.

Beides ist leicht zu überprüfen. $\square$

Wortprobleme

Lemma 16.4

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Es ist entscheidbar, ob

$$L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Korollar

Für rechtlineare Grammatiken G_1, G_2, G_3 und endliche Automaten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ ist entscheidbar, ob:

$$L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$$

$$L(G_1) \cup L(G_2) = L(G_3)$$

usw.

Wortprobleme

Lemma 16.4

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Es ist entscheidbar, ob

$$L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Korollar

Für rechtlineare Grammatiken G_1, G_2, G_3 und endliche Automaten $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ ist entscheidbar, ob:

$$L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2) = \emptyset$$

$$L(G_1) \cup L(G_2) = L(G_3)$$

usw.

Wortprobleme

Beweis

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) \;=\; (L(\mathcal{A}_1) \cap \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Wortprobleme

Beweis

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) \;=\; (L(\mathcal{A}_1) \cap \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Wortprobleme

Beweis

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) \; = \; (L(\mathcal{A}_1) \cap \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Wortprobleme

Beweis

Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ endliche Automaten.

Man kann zu $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ einen endlichen Automaten $\mathcal{A}_=$ konstruieren mit

$$L(\mathcal{A}_=) \;=\; (L(\mathcal{A}_1) \cap \overline{L(\mathcal{A}_2)}) \cup (\overline{L(\mathcal{A}_1)} \cap L(\mathcal{A}_2))$$

Es gilt

$$L(\mathcal{A}_=) = \emptyset \quad \underline{\text{gdw}} \quad L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$$

Dies ist entscheidbar.

Teil III

Teil III

Hauptsatz von Kleene

Theorem 17.1 (Hauptsatz von Kleene)

Die durch endliche Automaten akzeptierten Sprachen sind genau die, die man durch reguläre Ausdrücke beschreiben kann.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„⇒“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{ w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \\ \text{mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\} \}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„⇒“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R_{i,j}^k := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„$\Rightarrow$“ (schwierigere Richtung)

Gegeben ein DEA $\mathcal{A}$.

Zustände von $\mathcal{A}$ seien $q_1, \ldots, q_n$.

O.B.D.A. sei q_1 der initiale Zustand von $\mathcal{A}$

Induktion über die **Kompliziertheit** des Akzeptierens

Dafür sei genauer:

$$R^k_{i,j} := \{w \in \Sigma^* : \quad \delta^*(q_i, w) = q_j \text{ und für alle Präfixe } u \text{ von } w \text{ mit } \varepsilon \neq u \neq w \text{ gilt } \delta^*(q_i, u) \in \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}\}$$

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1,f}$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R^n_{1,f}$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ is durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1,f}$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R^n_{1,f}$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ is durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis (Forts.)

Offensichtlich ist

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} R^n_{1,f}$$

Es genügt zu zeigen:

Alle Mengen $R^n_{1,f}$ sind durch reguläre Ausdrücke beschreibbar.

Dazu: Durch Induktion über k (an der Tafel):

Für alle $1 \leq i, j \leq n$: $R^k_{1,j}$ is durch einen regulären Ausdruck beschreibb.

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„$\Leftarrow$“ (einfacherer Richtung)

Durch **Induktion** über den **Aufbau** regulärer Ausdrücke:

> Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen äquivlanten ε-NDEA

(an der Tafel)

Hauptsatz von Kleene: Beweis

Beweis

„$\Longleftarrow$“ (einfacherer Richtung)

Durch **Induktion** über den **Aufbau** regulärer Ausdrücke:

Zu jedem regulären Ausdruck gibt es einen äquivlanten ε-NDEA

(an der Tafel)