Vorlesung

Grundlagen der Theoretischen Informatik / Einführung in die Theoretische Informatik I

Bernhard Beckert

Institut für Informatik

UNIVERSITÄT KOBLENZ · LANDAU

Sommersemester 2007

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– Bernhard Beckert, April 2007

Teil III

Determiniert / indeterminiert

Determinierter endliche Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
  genau ein einziger Nachfolgezustand
- festgelegt durch Übergangs**funktion** δ

Indeterminierter endlicher Automat

- Für einen Zustand q und eine Eingabe a
  evtl. **mehrere Nachfolgezustände** – oder **gar keiner**
- festgelegt durch Übergangs**relation** Δ

Indeterminierter endlicher Automat

Definition 12.1 (Indeterminierter endlicher Automat)

Ein **indeterminierter** endlicher Automat (NDEA) ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

Dabei ist

- K eine endliche Menge von Zuständen,
- Σ ein endliches Alphabet,
- $\Delta \subseteq (K \times \Sigma) \times K$ eine Übergangs**relation**,
- $I \subseteq K$ eine **Menge von Startzuständen**,
- $F \subseteq K$ eine Menge von finalen Zuständen.

Indeterminierter endlicher Automat: Übergangsrelation

Definition 12.2 (Erweiterung von Δ zu Δ^*)

$$\Delta^* \subseteq (K \times \Sigma^*) \times K$$

ist definiert durch:

$$\Delta^*(\ (q,\varepsilon),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad q' = q$$

$$\Delta^*(\ (q,wa),\ q'\ ) \quad \underline{\text{gdw}} \quad \exists q'' \in K\ \big(\Delta^*(\ (q,w),\ q''\ ) \wedge \Delta(\ (q'',a),\ q'\ )\big)$$

NDEA: Akzeptierte Sprache

Wann akzeptiert ein indeterminierter Automat ein Wort?

Ein indeterminierter endlicher Automat $\mathcal{A}$ akzeptiert ein Wort w, wenn

- es **mindestens einen** Weg mit der **Beschriftung** w durch $\mathcal{A}$ gibt,
- der in einem **finalen** Zustand endet.

Definition 12.3 (Von einem NDEA akzeptierte Sprache)

Die von einem indeterminierten endlichen Automaten $\mathcal{A}$ **akzeptierte** Sprache ist

$$L(\mathcal{A}) \quad := \quad \{w \in \Sigma^* \mid \exists s_0 \in I \, \exists q \in F \, \Delta^*(\,(s_0, w),\ q\,)\}$$

NDEA: Beispiel

Beispiel 12.4

Der Automat

$$\mathcal{A} = (\{S_0, S_1, S_2\}, \{a, b\}, \Delta, \{S_0\}, \{S_0\})$$

mit

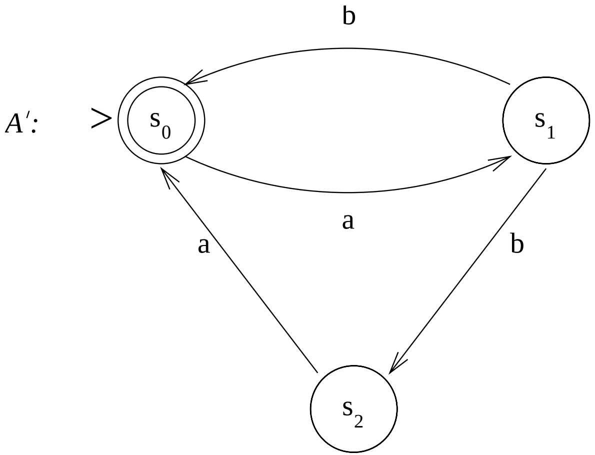
$$\Delta(S_0, a) = \{S_1\}$$
$$\Delta(S_1, b) = \{S_0, S_2\}$$
$$\Delta(S_2, a) = \{S_0\}$$

akzeptiert die Sprache

$$L = \{ab, aba\}^*$$

NDEA: Graphische Darstellung

Der indeterminierte Automat aus Beispiel 12.4



Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

Indeterminierter endlicher Automat

Vom indeterminierten Automaten zum Algorithmus?

Vom Automaten zum Algorithmus (für das Wortproblem):

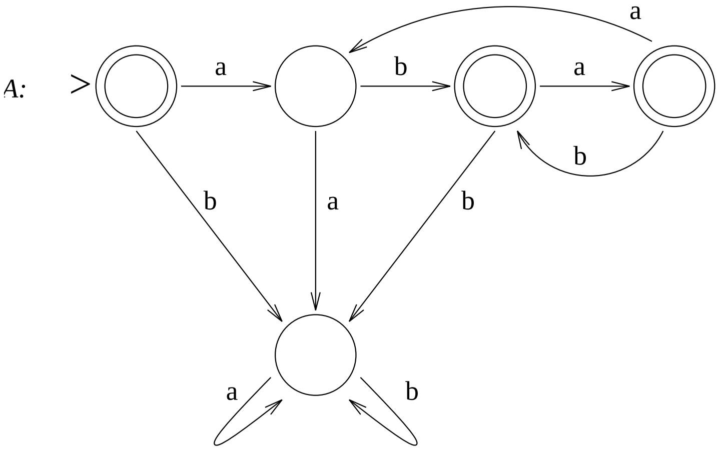
- **DEA** = **Algorithmus**
- **NDEA** + **Suchstrategie** = **Algorithmus**

Zwei Sichtweisen auf indeterminierte Automaten

- Der Automat durchläuft **alle** Wege
  (**parallel** oder mittels **Backtracking**)
- Der Automat **rät**, welcher von mehreren möglichen Folgezuständen der richtige ist

NDEA und DEA: Beispiel

Beispiel 12.5 (DEA für gleiche Sprache wie NDEA aus Bsp. 12.4)

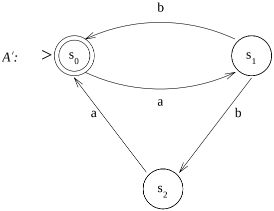


Akzeptiert: $\{ab, aba\}^*$

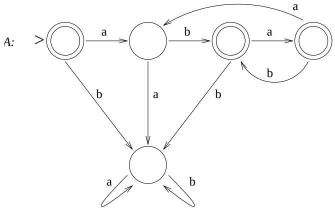
NDEA und DEA

Vergleich NDEA / DEA

NDEA:



DEA:



- DEA hat mehr Zustände, komplizierter
- DEA muss nicht „raten“
- DEA braucht genauso viele Schritte

NDEA und DEA

Wir zeigen später:

Für jeden indeterminierten Automaten A_{NDEA}
gibt es einen determinierten Automaten A_{DEA} mit

$$L(A_{\mathrm{NDEA}}) = L(A_{\mathrm{DEA}})$$

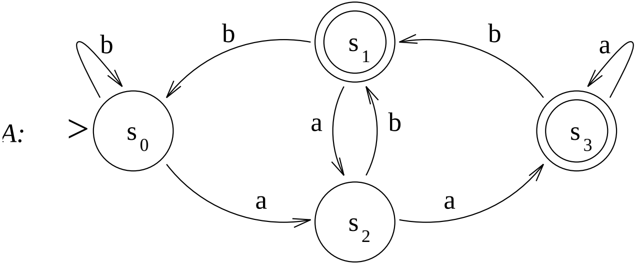
NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

Beispiel 12.6

Determinierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^* \{a\} \{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe ein a ist)



Idee: Im Zustand jeweils die letzten zwei Buchstaben merken

NDEA und DEA: Weiteres Beispiel

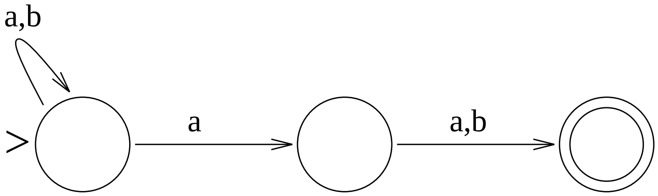
Beispiel 12.7

Indeterminierter Automat für die Sprache

$$L = \{a, b\}^*\{a\}\{a, b\}$$

(die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, deren zweitletzter Buchstabe ein a ist)

A':



NDEA und DEA: Größenvergleich

Größenvergleich (Worst case)

Sprache über $\{a, b\}$ der Wörter, deren nt-letzter Buchstabe ein a ist

Determinierter Automat: $\mathbf{2^n}$ Zustände
(einen für jede Buchstabenkombination der Länge n)

Indeterminierter Automat: $\mathbf{n+1}$ Zustände

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Theorem 12.8 (DEA gleich mächtig wie NDEA)

Eine Sprache ist rational
(es gibt einen determinierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert)

gdw

es gibt einen indeterminierten endlichen Automaten, der sie akzeptiert.

Beweis.

„⇒“:

- Sei L eine rationale Sprache.
- Dann gibt es laut Definition einen determinierten endlichen Automaten $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ mit $L = L(\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}})$.
- Jeder determinierte endliche Automat ist aber insbesondere auch ein (besonderer) indeterminierter endlicher Automat.

$\square$

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Forsetzung)

„$\Leftarrow$“:

Sei

$$\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}} = (K, \Sigma, \Delta, I, F)$$

ein (beliebiger) indeterminierter endlicher Automat.
Er akzeptiert die Sprache $L(\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}})$.

Beweisidee:
Konstruiere aus $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$ einen determinierten Automaten $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ mit

$$L(\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}) = L(\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}})$$

mit Hilfe einer Potenzmengenkonstruktion ...

Gleichmächtigkeit von DEA und NDEA

Beweis (Forsetzung)

Fortsetzung ...

- Zustände in $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ bestehen aus Mengen von Zuständen von $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$
- Wenn man in $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$ mit w nach $q_1, \ldots, q_n$ gelangt,
  dann gelangt man in $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$ mit w nach $q' = \{q_1, \ldots, q_n\}$.
- Initialer Zustand von $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$:
  Menge aller initialen Zustände von $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$
- Finale Zustände von $\mathcal{A}_{\mathrm{DEA}}$:
  Jede Menge von Zustände, die einen finalen Zustand von $\mathcal{A}_{\mathrm{NDEA}}$ enthält