

Vorlesung
**Grundlagen der Theoretischen Informatik /
Einführung in die Theoretische Informatik I**

Bernhard Beckert

Institut für Informatik



Sommersemester 2007

Indeterminierte Turing-Maschine

Beispiel 11.3

Eine indeterminierte Turing-Maschine, die

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ besitzt } aba \text{ als Teilwort}\}$$

akzeptiert.

Siehe Tafel.

Dank

Diese Vorlesungsmaterialien basieren ganz wesentlich auf den Folien zu den Vorlesungen von

Katrin Erk (gehalten an der Universität Koblenz-Landau)

Jürgen Dix (gehalten an der TU Clausthal)

Ihnen beiden gilt mein herzlicher Dank.

– *Bernhard Beckert, April 2007*

Indeterminierte Turing-Maschine

Beispiel 11.4

Sei

$$L = \{|^n \mid n \text{ ist nicht prim und } n \geq 2\}$$

Eine NTM kann diese Sprache wie folgt akzeptieren:

- 1 Eine Zahl „raten“ und (nach rechts) aufs Band schreiben.
- 2 Noch eine Zahl „raten“ und daneben schreiben.
- 3 Die beiden Zahlen miteinander multiplizieren.
- 4 Das Ergebnis mit der Eingabe vergleichen.
- 5 Genau dann, wenn beide gleich sind, anhalten

Indeterminierte Turing-Maschine

Theorem 11.5 (Simulation von NTM durch DTM)

Jede Sprache, die von einer indeterminierten Turing-Maschine akzeptiert wird, wird auch von einer Standard-DTM akzeptiert.

Beweis (Anfang)

Sei

- L eine Sprache über Σ_0^* mit $\# \notin \Sigma_0$;
- $\mathcal{M} = (K, \Sigma, \Delta, s)$ eine indeterminierte Turing-Maschine, die L akzeptiert.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Wir konstruieren zu \mathcal{M} eine Standard-DTM \mathcal{M}' , die so rechnet:

- \mathcal{M}' durchläuft systematisch **alle** Rechnungen von \mathcal{M} , und sucht dabei nach einer Haltekonfiguration.
- \mathcal{M}' genau dann, wenn sie eine Haltekonfiguration von \mathcal{M} findet.

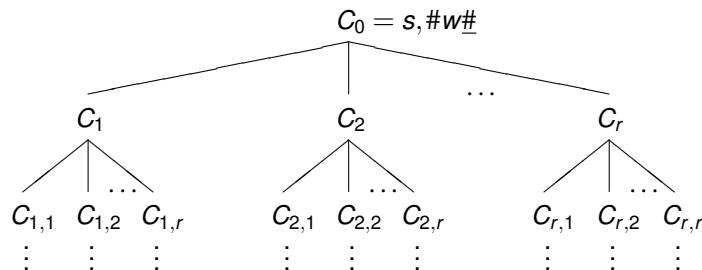
Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Suchbaum, Rechnungsbaum:

Stelle alle Rechnungen von \mathcal{M} von einer Startkonfiguration C_0 dar als einen Baum mit Wurzel C_0 .

Ein Ast ist eine mögliche Rechnung von \mathcal{M} .



Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Problem:

Es kann zur Startkonfiguration

$$C_0 = s, \#w\#$$

unendlich viele Rechnungen von \mathcal{M} geben, und jede einzelne von ihnen kann unendlich lang sein.

Wir können also nicht erst einen Ast ganz durchlaufen und dann den nächsten Ast durchsuchen.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Die Lösung:

Breitensuche

Durchlaufe den Rechenbaum nicht depth-first, sondern per **iterative deepening**.

- Untersuchen alle möglichen Rechnungen bis zum ersten Schritt.
- Untersuchen alle möglichen Rechnungen bis zum zweiten Schritt.
- Untersuchen alle möglichen Rechnungen bis zum dritten Schritt.
- usw.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Können wir damit denn in endlicher Zeit eine Haltekonfiguration finden, falls es eine gibt?

Problem:

Kann der Rechenbaum nicht nur **unendlich tief**, sondern auch **unendlich breit** werden?

Nein, denn:

Maximale Anzahl von Nachfolgekonfigurationen

$$r = \max\{|\Delta(q, a)| \mid q \in K, a \in \Sigma\}$$

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

\mathcal{M}' kann (z.B.) als eine 3-DTM gewählt werden:

- **Auf dem ersten Band steht immer das Eingabewort w .**
Da die Rechnung immer wieder neu mit $s, \#w\#$ von \mathcal{M} beginnt, wird das Eingabewort immer wieder gebraucht.
- **Auf dem zweiten Band steht, welcher Weg durch den Rechenbaum gerade verfolgt wird.**
Der Einfachheit halber: Wenn eine Konfiguration weniger als r Nachfolgekonfigurationen hat, soll der zugehörige Knoten trotzdem r Söhne haben, und die überzähligen Konfigurationen sind leer.

Indeterminierte Turing-Maschine

Beweis (Fortsetzung)

Darstellung des aktuellen Pfades im Rechenbaum als Zahl im r -adischen System.

Eine Zahl $d_1 \dots d_n$ bedeutet:

- Von der Startkonfiguration C_0 aus ist die d_1 -te der r möglichen Nachfolgekonfigurationen gewählt worden, C_{d_1} .
- Von C_{d_1} , einem Knoten der Tiefe 1, aus wurde die d_2 -te mögliche Nachfolgekonfiguration gewählt,
- usw.

Beweis (Fortsetzung)

Ausführung des Iterative Deepening:

- Beginne mit 0 auf zweitem Band.
- Jeweils nächste zu betrachtende Rechnung erhöhen der Zahl auf Band 2 um 1
- Auf Band 3 wird eine Rechnung von \mathcal{M} **determiniert** simuliert. Und zwar entsprechend der Zahl $d_1 \dots d_n$ auf Band 2. Die Endkonfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ dieser Rechnung steht im Rechenbaum an dem Knoten, der das Ende des Pfades $d_1 \dots d_n$ bildet.
- Ist die Konfiguration $C_{d_1 \dots d_n}$ eine Haltekonfiguration, so hält \mathcal{M}' .
- Sonst Zahl auf Band 2 erhöhen und die nächste Rechnungssimulation beginnen

Teil V

- 1 Determinierte Turing-Maschinen (DTMs)
- 2 Varianten von Turing-Maschinen
- 3 Indeterminierte Turing-Maschinen (NTMs)
- 4 Universelle determinierte Turing-Maschinen**
- 5 Entscheidbar/Aufzählbar
- 6 Determinierte Turing-Maschinen entsprechen Typ 0
- 7 Unentscheidbarkeit

Beweis (Ende)

Damit gilt:

\mathcal{M}' hält bei Input w
gdw
es gibt in R_{C_0} eine Haltekonfiguration.

Das ist genau dann der Fall, wenn

- \mathcal{M} bei Input w hält,
- w in L liegt.

□

Universelle Turing-Maschine

Vergleich Turing-Maschine / „normaler“ Computer

Turing-Maschinen sind sehr mächtig.

Wie mächtig sind sie wirklich?

- Eine Turing-Maschine hat eine vorgegebenes „Programm“ (Regelmenge)
- „Normale“ Computer können beliebige Programme ausführen.

Tatsächlich geht das mit Turing-Maschinen auch!

Universelle Turing-Maschine

Turing-Maschine, die andere TMen simuliert

- Universelle TM \mathcal{U} bekommt als Eingabe:
 - die Regelmenge einer beliebigen Turing-Maschine \mathcal{M} und
 - ein Wort w , auf dem \mathcal{M} rechnen soll.
- \mathcal{U} simuliert \mathcal{M} , indem sie jeweils nachschlägt, welchen δ -Übergang \mathcal{M} machen würde.

Universelle Turing-Maschine

TM als Eingabe für eine andere TM

Frage:

In welchem Format fasst man die Regeln einer DTM \mathcal{M} am besten, um sie einer universellen DTM als Eingabe zu geben?

Was muss man angeben, um eine DTM komplett zu beschreiben?

- das Alphabet,
- die Zustände,
- die δ -Übergänge
- den Startzustand.

Universelle Turing-Maschine

Standardisierung von Alphabet, Zustandsmenge, Startzustand

- Unendliches Alphabet $\Sigma_\infty = \{a_0, a_1, \dots\}$,
so daß das Alphabet jeder DTM eine Teilmenge von Σ_∞ ist.
- Namen der Zustände einer DTM sind egal.
Sie seien also q_1, \dots, q_n
(n kann dabei von DTM zu DTM verschieden sein).
- Sei q_1 immer der Startzustand, und
bezeichne q_0 den Haltezustand

Damit:

Wir können eine DTM komplett beschreiben, indem wir nur ihre δ -Übergänge beschreiben.

Universelle Turing-Maschine

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation

Die DTM $\mathcal{L}_\#$ habe die Regeln

$$\begin{array}{ll} q_1, \# \mapsto q_2, L & q_2, \# \mapsto h, \# \\ q_1, | \mapsto q_2, L & q_2, | \mapsto q_2, L \end{array}$$

Dabei sei: $\# = a_0$ und $| = a_1$

Dann kann die DTM $\mathcal{L}_\#$ so beschrieben werden:

| | a_0 | a_1 | |
|-------|----------|----------|---|
| q_1 | q_2, L | q_2, L | oder kürzer: $Z S 2\lambda S 2\lambda$ $Z S 00 S 2\lambda$ |
| q_2 | h, a_0 | q_2, L | |

(Mögliche) Kodierung der Übergangsrelation

Dabei steht:

- Z für "nächste Zeile"
- S für "nächste Spalte"
- λ für "links", ρ für "rechts"
- die Zahl n für den n -ten Zustand und für das n -te Zeichen von Σ_{∞} .

Damit ist die DTM insgesamt durch ein einziges Wort beschrieben:

$ZS2\lambda S2\lambda ZS00S2\lambda$

Gödelisierung

Ein Verfahren, jeder Turing-Maschine eine Zahl oder ein Wort (**Gödelzahl** bzw. **Gödelwort**) so zuzuordnen, daß man aus der Zahl bzw. dem Wort die Turing-Maschine effektiv rekonstruieren kann.

Kurt Gödel

Kurt Gödel ★ 1906, † 1978

- Bedeutendster Logiker des 20. Jahrhunderts
- Vollständigkeitssatz (1929)
Promotion in Wien
- Unvollständigkeitssatz (1931)
Idee der Gödelisierung
- Beweis der Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese
- Dozent in Princeton,
befreundet mit Albert Einstein
- Tragischer Tod:
Verfolgungswahn, Depressionen,
Tod durch Unterernährung.

