

Logik auf Abwegen: Gödels Gottesbeweis

Fabian Graf

06.August 2004





- ❑ Einführung
 - Geschichte der Gottesbeweise
 - Verschiedene Gottesbeweise
- ❑ Gödels Gottesbeweis
- ❑ Zusammenfassung



□ Definition: „Gott“

- Von Beweis zu Beweis unterschiedlich definiert.
- Meist höchstes Wesen, erste Ursache und/oder Schöpfer aller Dinge.

□ Definition: „Gottesbeweis“

- Als Gottesbeweis bezeichnet man im Allgemeinen Versuche, die Existenz (eines) Gottes zu beweisen, bzw. Argumente für eine solche Existenz zu finden. [Wik04][Bec00]



- ❑ Antikes Griechenland: Platon(400 v.Chr.), Aristoteles
- ❑ Antikes Rom: Cicero (50 v.Chr.)
- ❑ Anselm von Canterbury (1033-1109)
- ❑ Thomas von Aquin (1225-1274)
- ❑ ab 16.Jh (frühe Neuzeit); Bedeutung von Heute
- ❑ deutsche Aufklärung (17. und 18. Jahrhundert)
- ❑ 20.Jahrhundert



- Der moralische Gottesbeweis
 - gründet vom Dasein eines höchsten Wesens auf sittliche Gesetze.
[Hö04, 295ff.](das Gewissen als Gottesbeweis)



❑ Der moralische Gottesbeweis

- gründet vom Dasein eines höchsten Wesens auf sittliche Gesetze. [Hö04, 295ff.](das Gewissen als Gottesbeweis)

❑ Der ethnologische Gottesbeweis

- Gottesglauben bei vielen verschiedenen Völkern zu den verschiedensten Zeiten. [Lö94, 85ff.]



- ❑ Der moralische Gottesbeweis
 - gründet vom Dasein eines höchsten Wesens auf sittliche Gesetze. [Hö04, 295ff.](das Gewissen als Gottesbeweis)
- ❑ Der ethnologische Gottesbeweis
 - Gottesglauben bei vielen verschiedenen Völkern zu den verschiedensten Zeiten. [Lö94, 85ff.]
- ❑ Der mathematische Gottesbeweis
 - reduziert den Begriff „Gott“ auf eine mathematische Größe. [Wik04]



- ❑ Der moralische Gottesbeweis
 - gründet vom Dasein eines höchsten Wesens auf sittliche Gesetze. [Hö04, 295ff.](das Gewissen als Gottesbeweis)
- ❑ Der ethnologische Gottesbeweis
 - Gottesglauben bei vielen verschiedenen Völkern zu den verschiedensten Zeiten. [Lö94, 85ff.]
- ❑ Der mathematische Gottesbeweis
 - reduziert den Begriff „Gott“ auf eine mathematische Größe. [Wik04]
- ❑ Der pantheistische Gottesbeweis
 - sieht das Universum gleichbedeutend mit Gott an. [Wik04]



□ Der ontologische Gottesbeweis

- erzielte die größte Wirkungsgeschichte. [Lö94, 73]
- geht nicht von empirischen Fakten aus, sondern nur vom Begriff Gottes [Bec00, 5]



❑ Der ontologische Gottesbeweis

- erzielte die größte Wirkungsgeschichte. [Lö94, 73]
- geht nicht von empirischen Fakten aus, sondern nur vom Begriff Gottes [Bec00, 5]

❑ Der kosmologische Gottesbeweis

- geht von einfachen empirischen Fakten aus,
- dass irgend etwas existiert. (Das Universum) [Bec00, 1]



- ❑ Der ontologische Gottesbeweis
 - erzielte die größte Wirkungsgeschichte. [Lö94, 73]
 - geht nicht von empirischen Fakten aus, sondern nur vom Begriff Gottes [Bec00, 5]

- ❑ Der kosmologische Gottesbeweis
 - geht von einfachen empirischen Fakten aus,
 - dass irgend etwas existiert. (Das Universum) [Bec00, 1]

- ❑ Der teleologische Gottesbeweis
 - dass das Universum geordnet ist. [Bec00, 1]



□ Kurt Gödel:

- * 1906 in Österreich-Ungarn, † 1978 in den USA
- bedeutender Mathematiker und Logiker des 20. Jahrhunderts

Figure 1: Kurt Gödel

Überblick der verwendeten Symbole



Symbol	Umgangssprachlich
\vee	„oder“
\wedge	„und“
$=$	„gleich“
\rightarrow	„daraus folgt“
\leftrightarrow	„genau dann wenn“
\neg	„nicht“
\forall	„für alle“
\exists	„es existiert“
\square	„notwendig“
\diamond	„möglich“



- ❑ Gödels Beweis nach [Fuh01], [Gö95] und [Ess91]
- ❑ Unterteilt in drei Teile:
 1. Ein göttliches Wesen ist möglich
 2. Es gibt höchstens ein göttliches Wesen
 3. Es gibt genau ein göttliches Wesen



□ 1. Axiom:

$$(PX \wedge \Box \forall u (X(u) \rightarrow Y(u))) \rightarrow PY \quad (1)$$

- Eine Eigenschaft ist positiv, wenn sie notwendigerweise eine positive Eigenschaft enthält.

Gödels ontologischer Beweis: 1. Teil



□ 1. Axiom: $(PX \wedge \Box \forall u (X(u) \rightarrow Y(u))) \rightarrow PY$ (1)

□ 2. Axiom:

$$PX \dot{\vee} P\neg X \quad (2)$$

➤ Eine Eigenschaft ist entweder positiv oder negativ.



□ 1. Axiom: $(PX \wedge \Box \forall u (X(u) \rightarrow Y(u))) \rightarrow PY$ (1)

□ 2. Axiom: $PX \dot{\vee} P\neg X$ (2)

□ 1. Definition: „göttlich“

$$G(u) \leftrightarrow \forall X (PX \rightarrow X(u)) \quad (3)$$

➤ Etwas ist genau dann „göttlich“, wenn es alle positiven Eigenschaften besitzt.

Gödels ontologischer Beweis: 1. Teil



□ 1. Axiom: $(PX \wedge \Box \forall u (X(u) \rightarrow Y(u))) \rightarrow PY$ (1)

□ 2. Axiom: $PX \dot{\vee} P\neg X$ (2)

□ 1. Definition: $G(u) \leftrightarrow \forall X (PX \rightarrow X(u))$ (3)

□ 3. Axiom:

$$PG \quad (4)$$

➤ Göttlichkeit ist eine positive Eigenschaft.



□ 1. Axiom: $(PX \wedge \Box \forall u (X(u) \rightarrow Y(u))) \rightarrow PY$ (1)

□ 2. Axiom: $PX \dot{\vee} P\neg X$ (2)

□ 1. Definition: $G(u) \leftrightarrow \forall X (PX \rightarrow X(u))$ (3)

□ 3. Axiom: PG (4)

□ 1. Theorem:

$$PX \rightarrow \Diamond \exists u (X(u)) \quad (5)$$

➤ Positive Eigenschaften sind konsistent. (logisch widerspruchsfrei)

Gödels ontologischer Beweis: 1. Teil



□ 1. Axiom: $(PX \wedge \Box \forall u (X(u) \rightarrow Y(u))) \rightarrow PY$ (1)

□ 2. Axiom: $PX \dot{\vee} P\neg X$ (2)

□ 1. Definition: $G(u) \leftrightarrow \forall X (PX \rightarrow X(u))$ (3)

□ 3. Axiom: PG (4)

□ 1. Theorem: $PX \rightarrow \Diamond \exists u (X(u))$ (5)

□ Korollar zum 1. Theorem:

$$\text{aus (5) und (4) : } \Diamond \exists u (G(u)) \quad (6)$$

➤ Ein göttliches Wesen ist möglich.



□ 4. Axiom:

$$PX \rightarrow \Box PX \quad (7)$$

➤ Positiv sein ist logisch und deshalb notwendig.



□ 4. Axiom: $PX \rightarrow \Box PX$ (7)

□ 2. Definition: „wesentliche Eigenschaft“

$$X \text{ Ess } u \leftrightarrow X(u) \wedge \forall Y (Y(u) \rightarrow \Box \forall v (X(v) \rightarrow Y(v))) \quad (8)$$

- Eine Eigenschaft X ist genau dann wesentliche Eigenschaft von u , wenn u ein X ist und alle anderen Eigenschaften von u daraus notwendig folgen.
- Damit sind alle wesentlichen Eigenschaften notwendig äquivalent.



□ 4. Axiom: $PX \rightarrow \Box PX$ (7)

□ 2. Definition: $X \text{ Ess } u \leftrightarrow X(u) \wedge \forall Y(Y(u) \rightarrow \Box \forall v(X(v) \rightarrow Y(v)))$ (8)

□ 2. Theorem:

$$G(u) \rightarrow G \text{ Ess } u \quad (9)$$

➤ Wenn u göttlich ist, dann ist Göttlichkeit eine wesentliche Eigenschaft von u .



□ 4. Axiom: $PX \rightarrow \Box PX$ (7)

□ 2. Definition: $X \text{ Ess } u \leftrightarrow X(u) \wedge \forall Y (Y(u) \rightarrow \Box \forall v (X(v) \rightarrow Y(v)))$ (8)

□ 2. Theorem: $G(u) \rightarrow G \text{ Ess } u$ (9)

□ Folgerungen:

➤ jede weitere Eigenschaft von u folgt aus der Eigenschaft G .

➤ vorallem die Eigenschaft mit u identisch zu sein. ($u = _$)

$$u = u \rightarrow \Box \forall v (G(v) \rightarrow u = v)$$

➤ eine Instanz von: (mit $u = _$ eingesetzt für Y)

$$\forall Y (Y(u) \rightarrow \Box \forall v (G(v) \rightarrow Y(v)))$$



□ 4. Axiom: $PX \rightarrow \Box PX$ (7)

□ 2. Definition: $X \text{ Ess } u \leftrightarrow X(u) \wedge \forall Y(Y(u) \rightarrow \Box \forall v(X(v) \rightarrow Y(v)))$ (8)

□ 2. Theorem: $G(u) \rightarrow G \text{ Ess } u$ (9)

□ Folgerung: $\forall Y(Y(u) \rightarrow \Box \forall v(G(v) \rightarrow Y(v)))$

□ Korollar zum 2. Theorem:

➤ Da $u = u$ immer wahr ist, schließen wir auf:

$$G(u) \rightarrow \Box \forall v(G(v) \rightarrow u = v) \quad (10)$$

➤ Es gibt höchstens ein göttliches Wesen.



□ 3. Definition: „notwendige Existenz“

$$E(u) \leftrightarrow \forall X (X \text{ Ess } u \rightarrow \Box \exists v (X(v))) \quad (11)$$

- u existiert dann notwendigerweise, wenn alle wesentlichen Eigenschaften von u notwendig instantiiert sind.



□ 3. Definition: $E(u) \leftrightarrow \forall X (X \text{ Ess } u \rightarrow \Box \exists v (X(v)))$ (11)

□ 5. Axiom:

PE (12)

➤ Notwendige Existenz ist eine positive Eigenschaft.



□ 3. Definition: $E(u) \leftrightarrow \forall X (X \text{ Ess } u \rightarrow \Box \exists v (X(v)))$ (11)

□ 5. Axiom: PE (12)

□ 3. Theorem:

$$\Diamond \exists u (G(u)) \rightarrow \Box \exists u (G(u)) \quad (13)$$

➤ Wenn die Existenz eines göttlichen Wesens möglich ist, dann ist sie auch notwendig.



□ Beweis zum 3. Theorem:

$$\diamond \exists u(G(u)) \rightarrow \square \exists u(G(u)) \quad (13)$$

□ Wir benötigen: Modales Prinzip (RM)

$$\text{aus } A \rightarrow B \text{ schlie\ss e } \square A \rightarrow \square B \quad (14)$$

➤ Wenn es eine log. Tatsache ist, dass B wahr ist, wenn A wahr ist und A in jeder der möglichen Welten wahr ist, dann ist auch B in allen möglichen Welten wahr.

□ Wir benötigen: Modales Axiom (B)

$$\diamond \square A \rightarrow \square A \quad (15)$$



□ Zu Beweisen: $\exists u(G(u)) \rightarrow \Box \exists u(G(u))$ aus (13)

□ 1. Definition: $G(u) \leftrightarrow \forall X(PX \rightarrow X(u))$ (3)

□ 5. Axiom: PE (12)

□ 3. Definition: $E(u) \leftrightarrow \forall X(X \text{ Ess } u \rightarrow \Box \exists v(X(v)))$ (11)

□ 2. Theorem: $G(u) \rightarrow G \text{ Ess } u$ (9)

□ Annahme:

$$\exists v(G(v)) \Rightarrow_{(3)} \forall X(PX \rightarrow X(v)) \Rightarrow_{(12)} E(v) \Rightarrow_{(11)} \forall Y(Y \text{ Ess } v \rightarrow \Box \exists u(Y(u)))$$

➤ Aus (9) und der Annahme $G(v)$, wissen wir, dass Göttlichkeit eine wesentliche Eigenschaft von v ist.

$$\implies \Box \exists u(G(u)). \quad (16)$$



□ Zu Beweisen: $\diamond \exists u(G(u)) \rightarrow \square \exists u(G(u))$ (13)

□ (RM): aus $A \rightarrow B$ schließe $\square A \rightarrow \square B$ (14)

□ (B): $\diamond \square A \rightarrow \square A$ (15)

$$(13) \Rightarrow_{(14)} \diamond \exists u(G(u)) \rightarrow \diamond \square \exists u(G(u)) \quad (17)$$

$$(13) \Rightarrow_{(15)} \diamond \square \exists u(G(u)) \rightarrow \square \exists u(G(u)) \quad (18)$$

$$\Rightarrow_{(17)\text{und}(18)} \diamond \exists u(G(u)) \rightarrow \square \exists u(G(u))$$



□ 1. Theorem: $PX \rightarrow \diamond \exists u(X(u))$ (5)

➤ Positive Eigenschaften sind logisch widerspruchsfrei.

□ 2. Theorem: $G(u) \rightarrow G \text{ Ess } u$ (9)

➤ Wenn u göttlich ist, dann ist Göttlichkeit eine wesentliche Eigenschaft von u .

□ 3. Theorem: $\diamond \exists u(G(u)) \rightarrow \square \exists u(G(u))$ (13)

➤ Wenn die Existenz eines göttlichen Wesens möglich ist, dann ist sie auch notwendig.

□ Aus (5) und (13) in Verbindung mit (9) folgt:

□ Korollar zum 3. Theorem:

$$\square(\exists u(G(u)) \wedge \forall v(G(v) \rightarrow u = v))$$

➤ Es gibt notwendig genau ein göttliches Wesen.



- ❑ Einführung in die Gottesbeweise
- ❑ Gödels Gottesbeweis von 1970



References

- [Bec00] Ansgar Beckermann. Gottesbeweise, 2000.
- [Ess91] Wilhelm K. Essler. Gödels beweis. In Friedo Ricken, editor, *Klassische Gottesbeweise in der Sicht der gegenwärtigen Logik und Wissenschaftstheorie*, volume 4 of *Münchener philosophische Studien. Neue Folge*, pages 140–152, Stuttgart, 1991. W. Kohlhammer GmbH.
- [Fuh01] Andre‘ Fuhrmann. ‘g’ für gödel - kurt gödels axiomatische theologie. In W.Spohn and E.Olsson, editors, *Logik in der Philosophie*. P. Schroeder-Heister, 2001.
- [Gö95] Kurt Gödel. Onthological proof. In Warren Goldfarb Charles Parsons Solomon Feferman, John W. Dawson Jr. and



Robert N. Solovay, editors, *Unpublished Essays and Letters.*, volume 3 of *Collected Works*, pages 403–404, Oxford, 1995. Oxford University Press.

- [Hö04] Otfried Höffe. *Kants Kritik der reinen Vernunft*. C.H. Beck oHG, München, 2004.
- [Lö94] Reinhard Löw. *Die neuen Gottesbeweise*. Pattloch Verlag, Augsburg, 1994.
- [Sch84] Hans Schwarz. *Band I: Gott oder kein Gott?* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen/Zürich, 1984.
- [Swi87] Richard Swinburne. *Die Existenz Gottes*. Phillip Reclam jun., Stuttgart, 1987. Original-Titel: *The Existence of God*.
- [Wik04] Wikipedia - gottesbeweis, 2004.