Universität Koblenz-Landau SS '06
Institut für Informatik
Bernhard Beckert · `www.uni-koblenz.de/~beckert`
Claudia Obermaier · `www.uni-koblenz.de/~obermaie`
Cristoph Gladisch · `www.uni-koblenz.de/~gladisch`

Übung zur Vorlesung

Logik für Informatiker

Musterlösung Aufgabenblatt 9

Aufgabe 31

Geben Sie an, welche Vorkommen der Variablen in der Formel F frei und welche gebunden sind:

$$F = (\forall z(q(z) \land \forall x\ p(x,y))) \lor (\exists y p(x,y))$$

Lösung:

- z ist gebunden.
- Das erste Vorkommen von x ist gebunden, das zweite frei.
- Das erste Vorkommen von y ist frei, das zweite gebunden.

Aufgabe 32

Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(a) $\sigma = \{x/f(g(x),c)\}$ $F = \forall y(p(x,y) \lor \forall z \exists x(f(z,c) \doteq f(c,x)))$

Lösung:
σ ist kollisionsfrei
$F\sigma = \forall y(p(f(g(x),c),y) \lor \forall z \exists x(f(z,c) \doteq f(c,x)))$

(b) $\sigma = \{x/c, y/f(c,g(x))\}$ $F = \exists x(p(g(x), f(x,y)) \lor q(x))$

Lösung:
σ ist nicht kollisionsfrei, denn:
x kommt in $\sigma(y)$ vor und
y kommt im Wirkungsbereich des Quantors $\exists x$ vor

(c) $\sigma = \{y/g(x), z/g(y)\}$ $F = p(x,y) \to \exists x(q(f(x,z)) \lor \forall y(q(f(x,y))))$

Lösung:
σ ist kollisionsfrei
$F\sigma = p(x,g(x)) \to \exists x(q(f(x,g(y))) \lor \forall y(q(f(x,y))))$

Aufgabe 33

Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Falls sie unifizierbar sind, geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $F\mu = G\mu$ der Unifikation an.
(a) $F = p(x, y) \quad G = p(f(y), f(x))$

Lösung:
F und G sind nicht unifizierbar
Die Anwendung der Regeln liefert:
$p(x, y) = p(f(y), f(x))$ ✓(Regel (3))
$x = f(y)$
$y = f(x)$ ✓(Regel (4))
$y = f(y)$ $FAIL!$ (Regel(7))

(b) $F = q(f(f(x, y), x)) \quad G = q(f(f(g(c), z), g(z)))$

Lösung:
F und G sind unifizierbar.
Die Anwendung der Regeln liefert:
$q(f(f(x, y), x)) = q(f(f(g(c), z), g(z)))$ ✓(Regel (3))
$f(f(x, y), x)) = f(f(g(c), z), g(z))$ ✓(Regel (3))
$f(x, y) = f(g(c), z)$ ✓(Regel (3))
$x = g(z)$ ✓
$x = g(c)$ ✓(Regel(4))
$y = z$ ✓
$g(z) = g(c)$ ✓(Regel(3))
$z = c$
$y = c$
$x = g(c)$

Daraus können wir einen allgemeinsten Unifikator von F und G ablesen:
$\mu = \{x|g(c), y|c, z|c\}$
$F\mu = p(f(f(g(c), c), g(c)))$

(c) $F = p(x, f(y, x)) \quad G = p(f(y, c), f(g(z), f(g(z), c)))$

Lösung:
F und G sind unifizierbar.
Die Anwendung der Regeln liefert:
$p(x, f(y, x)) = p(f(y, c), f(g(z), f(g(z), c)))$ ✓(Regel (3))
$x = f(y, c)$✓
$f(y, x) = f(g(z), f(g(z), c))$ ✓(Regel (3))
$y = g(z)$
$x = f(g(z), c)$
$f(g(z), c) = f(y, c)$ ✓(Regel(3))
$g(z) = y$ ✓(Regel(1))
$c = c$ ✓

Daraus können wir einen allgemeinsten Unifikator von F und G ablesen:
$\mu = \{x|f(g(z), c), y|g(z)\}$

$F\mu = p(f(g(z), c), f(g(z), f(g(z), c))$

Aufgabe 34

Beweisen Sie, dass $\forall x \exists y(p(x, y))$ eine Folgerung aus $\exists y \forall x(p(x, y))$ ist, aber nicht umgekehrt.

Lösung:

(1) $I(\forall x \exists y(p(x, y))) = 1$ genau dann, wenn es für jedes $u \in U$ ein $v \in U$ gibt mit $p^I(u, v) = 1$.

(2) $I(\exists y \forall x(p(x, y))) = 1$ genau dann, wenn es ein $u \in U$ gibt, so dass für alle $v \in U$ gilt $p^I(u, v) = 1$.

Man sieht leicht, dass (2) $\Rightarrow$ (1) gilt.
Die andere Richtung ((1) $\Rightarrow$ (2)) gilt jedoch nicht. Wir geben ein Gegenbeispiel an:

$$\begin{aligned} U &= \{a, b\} \\ p^I &= \{(a, b), (b, a)\} \end{aligned}$$

In dieser Interpretation ist die Formel $\forall x \exists y(p(x, y))$ wahr, denn für $a \in U$ gibt es b mit $p^I(a, b) = 1$ und für $b \in U$ gibt es a mit $p^I(b, a) = 1$.
Die Formel $\exists y \forall x(p(x, y))$ ist in dieser Interpretation jedoch falsch, denn für $a \in U$ gilt nicht, dass für alle $v \in U$ $p^I(a, v) = 1$ ist (denn $p^I(a, a) = 1$ gilt nicht). Und für $b \in U$ gilt auch nicht, dass für alle $v \in U$ $p^I(b, v) = 1$ ist (denn $p^I(b, b) = 1$ gilt nicht).

Bernhard Beckert: Zi. B218, Tel. 287-2775, beckert@uni-koblenz.de
Claudia Obermaier: Zi. B219, Tel. 287-2773, obermaie@uni-koblenz.de
Christoph Gladisch: gladisch@uni-koblenz.de
Materialien: http://www.uni-koblenz.de/~beckert/Lehre/Logik/