Universität Koblenz-Landau SS '06
Institut für Informatik
Bernhard Beckert · `www.uni-koblenz.de/~beckert`
Claudia Obermaier · `www.uni-koblenz.de/~obermaie`
Cristoph Gladisch · `www.uni-koblenz.de/~gladisch`

Übung zur Vorlesung

Logik für Informatiker

Musterlösung Aufgabenblatt 8

Aufgabe 26

Geben Sie für die Formel

$$(B \to C) \land (C \leftrightarrow A) \land (A \leftrightarrow \neg B) \land (B \lor \neg C)$$

eine Widerlegung mittels nachstehender Verfahren an. Wandeln Sie für (a) und (b) die Formel erst in Klauselnormalform um.

(1) **Modell-Elimination (starke Konnektionsbedingung)**

Lösung:

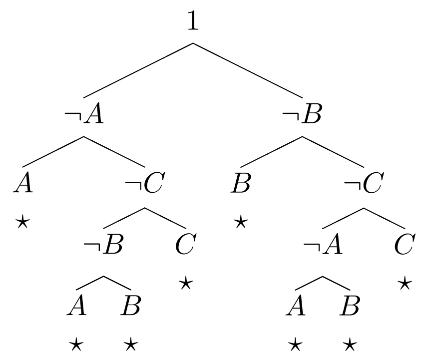
Umwandlung in Klauselnormalform:

$$\begin{aligned} &(B \to C) \land (C \leftrightarrow A) \land (A \leftrightarrow \neg B) \land (B \lor \neg C) \\ =&(\neg B \lor C) \land (\neg C \lor A) \land (\neg A \lor C) \land (\neg A \lor \neg B) \land (B \lor A) \land (B \lor \neg C) \end{aligned}$$

Klauselmenge dazu:

$$\{\{\neg B, C\}, \{\neg C, A\}, \{\neg A, C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, A\}, \{B, \neg C\}\}$$

Klauseltableau mit starker Konnektionsbedingung:



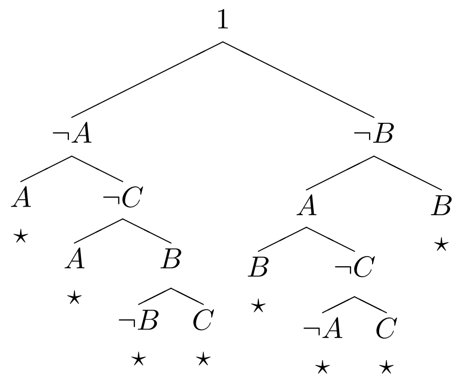
(2) **Klauseltableau mit schwacher Konnenktionsbedingung:** Finden Sie ein reguläres und von Teil (a) abweichendes Klauseltableau.

Lösung:

Umwandlung der gegebenen Formel in Klauselnormalform siehe Aufgabenteil (a). Ergebnis ist die Klauselmenge:

$$\{\{\neg B, C\}, \{\neg C, A\}, \{\neg A, C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{B, A\}, \{B, \neg C\}\}$$

Reguläres Klauseltableau mit schwacher Konnektionsbedingung (von (a) abweichende Lösung):



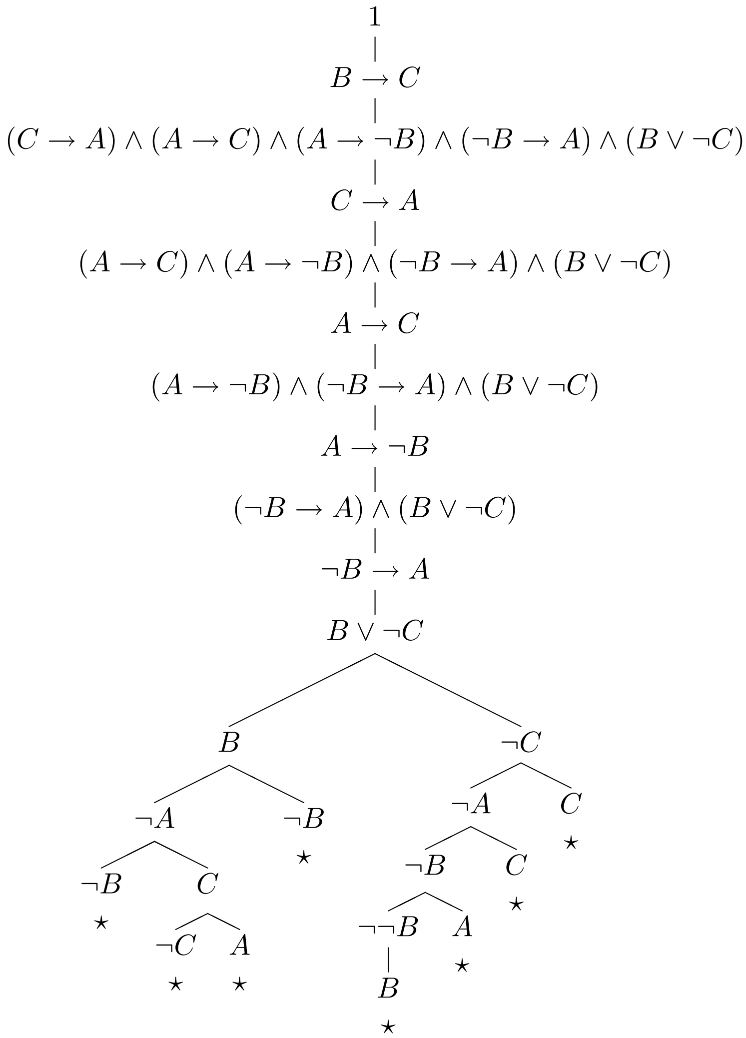
(3) **Aussagenlogisches Tableau**

Lösung:

Zuerst lösen wir die in der Formel vorkommenden Äquivalenzen auf:

$$\begin{aligned}
&(B \to C) \wedge (C \leftrightarrow A) \wedge (A \leftrightarrow \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \\
=&(B \to C) \wedge (C \to A) \wedge (A \to C) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\neg B \to A) \wedge (B \vee \neg C)
\end{aligned}$$

Aussagenlogisches Tableau:



Aufgabe 27

Zeigen Sie die Unerfüllbarkeit der Formel

$$(A \to B) \land (A \to \neg B) \land (A \lor B) \land (A \lor C) \land \neg C$$

mittels Klauseltableau mit schwacher Konnektionsbedingung, die keine Modell-Elimination (starke Konnektionsbedingung) ist.

Lösung:

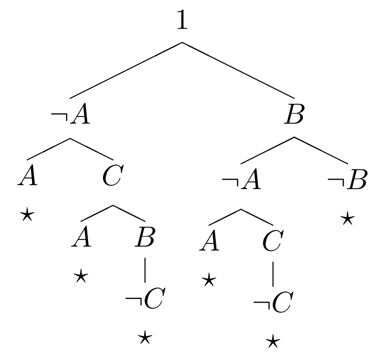
Umwandlung der gegebenen Formel in Klauselnormalform siehe Aufgabenteil (a). Ergebnis ist die Klauselmenge:

$$\begin{aligned} &(A \to B) \land (A \to \neg B) \land (A \lor B) \land (A \lor C) \land \neg C \\ =&(\neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B) \land (A \lor B) \land (A \lor C) \land \neg C \end{aligned}$$

Die Klauselmenge dazu ist:

$$\{\{\neg A, B\}, \{\neg A, \neg B\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{\neg C\}\}$$

Klauseltableau mit schwacher Konnektionsbedingung (keine starke Konnektionsbedingung):



Aufgabe 28

Seien p und q Prädikate über den natürlichen Zahlen. Die Semantik von p und q sei gegeben durch:

- $p(x, y)$ gilt genau dann, wenn x die Zahl y teilt und
- $q(x, y)$ gilt genau dann, wenn $x \leq y$ ist.

Für alle Interpretationen I, deren Universum die natürlichen Zahlen sind und für die gilt, dass

$$\begin{aligned} p^I &= \{(x, y) \mid x \text{ teilt } y\} \text{ und} \\ q^I &= \{(x, y) \mid x \leq y\} \end{aligned}$$

ist, muss z.B. für die im Aufgabenteil (a) gebildete Formel F gelten, dass F^I genau dann wahr ist, wenn y^I eine Primzahl ist.

Formalisieren Sie mit Hilfe der Prädikatenlogik:

(1) y ist eine Primzahl
Lösung:
$\forall x (p(x, y) \to (x = 1) \lor (x = y)) \land \neg(y = 1)$

(2) y ist eine gerade Zahl
Lösung:
$p(2, y)$

(3) ggt ist der größte gemeinsame Teiler der beiden Zahlen x und y
Lösung:
$\forall x \forall y \exists ggt(p(ggt, x) \land p(ggt, y) \land \forall z(p(z, y) \land p(z, x) \to q(z, ggt)))$

(4) kgV ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Zahlen x und y
Lösung:
$\forall x \forall y \exists kgV(p(x, kgV) \land p(y, kgV) \land \forall z(p(y, z) \land p(x, z) \to q(kgV, z)))$

(5) x und y sind teilerfremde Zahlen
Lösung:
$\neg \exists z(p(z, x) \land p(z, y) \land \neg(z = 1))$

Aufgabe 29

Schreiben Sie die folgenden Sätze als prädikatenlogische Formeln. Benutzen Sie dabei die einstelligen Prädikate *arbeiten*, *student*, *mensch*, *freuen*, *sterblich* und die zweistelligen Prädikate *ungleich* und *streiten*.

(1) Jemand arbeitet
Lösung:
$\exists x \; arbeiten(x)$

(2) Jeder Student arbeitet
Lösung:
$\forall x(student(x) \to arbeiten(x))$

(3) Kein Student arbeitet
Lösung:
$\forall x(student(x) \to \neg arbeiten(x))$

(4) Kein Mensch ist unsterblich
Lösung:
$\neg \exists x(mensch(x) \land \neg sterblich(x))$

(5) Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte
Lösung:
$\forall x \forall y \forall z(ungleich(x, y) \land ungleich(x, z) \land ungleich(y, z) \land streiten(x, y) \to freuen(z))$

Aufgabe 30

Gegeben sei die Struktur $I = \langle U, A \rangle$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &U = \mathbb{R}, \\ &p^I = \{z \mid z \geq 0\}, \\ &q^I = \{(x, y) \mid x = y\}, \\ &f^I(z) = z^2, \\ &g^I(x, y) = x + y, \\ &x^I = \sqrt{2}, \\ &y^I = -1 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Wert folgender Terme und Formeln:

(1) $I(g(f(x), f(y)))$

Lösung:

$$\begin{aligned}
I(g(f(x), f(y))) &= g^I(I(f(x)), I(f(y))) \\
&= f^I(I(x)) + f^I(I(y)) \\
&= (x^I)^2 + (y^I)^2 \\
&= (\sqrt{2})^2 + (-1)^2 \\
&= 2 + 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

(2) $I(\forall x\ p(f(x)))$

Lösung:
Betrachten wir zunächst $I(p(f(x)))$:

$$I(p(f(x))) = p^I(f^I(x^I))$$

$p^I(f^I(x^I))$ hat genau denn den Wert true, wenn $(x^I)^2 \geq 0$ ist. Da dies für jede Belegung von x mit Elementen aus U gilt, gilt auch $I_{x/d}(p(f(x))) = true$ für alle $d \in U$. Daraus folgt $I(\forall x\ p(f(x))) = true$

(3) $I(\exists z \forall x \forall y\ q(g(x, y), z))$

Lösung:
Wir betrachten $I(q(g(x, y), z))$:

$$I(q(g(x, y), z)) = q^I(g^I(x^I, y^I))$$

$q^I(g^I(x^I, y^I), z^I))$ ist genau dann wahr, wenn $x^I + y^I = z^I$ ist. Es gibt jedoch kein $z \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x + y = z$
Daraus folgt $I(\exists z\ \forall x\ \forall y\ q(g(x, y), z)) = false$

(4) $I(\forall y(q(f(x), y) \rightarrow p(g(x, y))))$

Lösung:
In $\forall y\ (q(f(x), y) \rightarrow p(g(x, y)))$ kommt x frei vor und y gebunden. Daher ist $x^I = \sqrt{2}$.
Außerdem ist:

$$I(q(f(x), y) \rightarrow p(g(x, y))) = q^I(f^I(x^I, y^I) \rightarrow p^I(g^I(x^I, y^I))$$

und $q^I(f^I(x^I, y^I) \rightarrow p^I(g^I(x^I, y^I))$ ist genau dann wahr, wenn

$$((x^I)^2 = y) \rightarrow ((x^I + y^I) \geq 0)$$
$$((\sqrt{2})^2 = y) \rightarrow ((\sqrt{2} + y^I) \geq 0)$$

ist. Betrachten wir nun den Wahrheitswert von

$$\forall y(((\sqrt{2})^2 = y) \rightarrow ((\sqrt{2} + y) \geq 0)))$$

Die Prämisse $\forall y((\sqrt{2})^2 = y)$ ist genau dann wahr, wenn y den Wert 2 hat. Für $y = 2$ ist jedoch auch die Konklusion $\sqrt{2} + 2 \geq 0$ wahr. Daraus folgt:

$$I(\forall y\ (q(f(x), y) \rightarrow p(g(x, y)))) = true$$

Bernhard Beckert: Zi. B218, Tel. 287-2775, `beckert@uni-koblenz.de`
Claudia Obermaier: Zi. B219, Tel. 287-2773, `obermaie@uni-koblenz.de`
Christoph Gladisch: `gladisch@uni-koblenz.de`
Materialien: `http://www.uni-koblenz.de/~beckert/Lehre/Logik/`