Vorlesung

Logik für Informatiker

14. Prädikatenlogik

– Korrektheit und Vollständigkeit der prädikatenlogischen Resolution –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Korrektheit

Theorem (Korrektheit)

Für prädikatenlogische Klauselmenge S:

Gilt $S \vdash_R \square$,

dann ist S unerfüllbar

Korrektheit

Theorem (Korrektheit)

Für prädikatenlogische Klauselmenge S:

Gilt $S \vdash_R \square$,

dann ist S unerfüllbar

Beweis

Wie bei Aussagenlogik:

Einzelne Regelanwendung erhält die Erfüllbarkeit der Klauselmenge

Auch dies einfach zu beweisen wie in Aussagenlogik

(beachte dabei: Variablen in Klauseln sind universell quantifiziert)

Vollständigkeit

Theorem (Vollständigkeit)

Für prädikatenlogische Klauselmeng S:

Ist S unerfüllbar,

dann gilt $S \vdash_R \square$

Vollständigkeit

Beweis

Wegen Satz von Herbrand:
es gibt endliche Menge S' von Grundinstanzen von Klauseln in S, die unerfüllbar ist

Diese ist aussagenlogisch unerfüllbar über der Signatur

$$\Sigma_{AL} = \text{Menge aller Grund-Atome über } \Sigma$$

Vollständigkeit der aussagenlogischen Resolution liefert: $S' \vdash_{RA} \Box$

mit aussagenlogischer Ableitung $\Gamma^0 = \langle C_1^0, \ldots, C_n^0 \rangle$

Lifting:
Aus Γ^0 konstruiere prädikatenlogische Ableitung Γ von $\Box$ aus S

Lifting-Lemma

Notation

$\mathcal{R}^n(S)$:
die Klauseln, die mit Resolutionsableitung der Länge $\leq n$ aus S abgeleitet werden können.

$$\mathcal{R}(S) = \bigcup_{n \geq 0} (\mathcal{R}^n(S))$$

Lifting-Lemma

Notation

$\mathcal{R}^n(S)$:
die Klauseln, die mit Resolutionsableitung der Länge $\leq n$ aus S abgeleitet werden können.

$$\mathcal{R}(S) = \bigcup_{n \geq 0} (\mathcal{R}^n(S))$$

Lemma

Für alle endlichen Klauselmengen S und endlichen Mengen T von Grundtermen gilt:

$$\mathcal{R}(T(S)) \subseteq T(\mathcal{R}(S))$$

Dabei: $T(S)$ die T-Instanzen von S

Lifting-Lemma

Beweis

Nicht schwierig aber technisch aufwendig, da:

- **In PL-Ableitung ggf. zusätzlich Faktorisierungsschritte erforderlich**

Lifting-Lemma

Beweis

Nicht schwierig aber technisch aufwendig, da:

- **In PL-Ableitung ggf. zusätzlich Faktorisierungsschritte erforderlich**
- **Substitutionen in PL-Resolutionsschritten müssen MGUs sein**

Lifting-Lemma

Beweis

Nicht schwierig aber technisch aufwendig, da:

- **In PL-Ableitung ggf. zusätzlich Faktorisierungsschritte erforderlich**
- **Substitutionen in PL-Resolutionsschritten müssen MGUs sein**
- **Einzelner Schritt involviert viele verschiedene Substitutionen (Bereinigung, zwei Faktorisierungen, Resolution)**

Zusammenfassung: Korrektheit und Vollständigkeit

- **Korrektheit**

Zusammenfassung: Korrektheit und Vollständigkeit

- **Korrektheit**
- **Vollständigkeit**

Zusammenfassung: Korrektheit und Vollständigkeit

- **Korrektheit**
- **Vollständigkeit**
- **Lifting-Lemma**