Unifikation

Definition: Unifikator

T eine Menge von Termen

Eine Substitution σ ist Unifikator von T, falls

$\sigma(T)$ einelementig ist

Unifikation

Definition: Unifikator

T eine Menge von Termen

Eine Substitution σ ist Unifikator von T, falls

$\sigma(T)$ einelementig ist

Insbesondere

σ ist Unifikator von Termen t_1, t_2, falls

$$t_1\sigma = t_2\sigma$$

Unifikation: Beispiel

Beispiel

$$\{f(g(a,x),g(y,b)),\ f(z,g(v,w)),\ f(g(x,a),g(v,b))\}$$

wird unifiziert durch

$$\{x/a,\ y/v,\ z/g(a,a),\ w/b\}$$

Unifikation

Ein paar simple Fakten

- **Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)**

Unifikation

Ein paar simple Fakten

- **Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n), \; f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. $\{s_i, t_i\}$ unifizierbar für $1 \leq i \leq n$**

Unifikation

Ein paar simple Fakten

- **Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n),\ f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. $\{s_i, t_i\}$ unifizierbar für $1 \leq i \leq n$**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n),\ g(t_1, \ldots, t_m)$ sind niemals unifb.**

Unifikation

Ein paar simple Fakten

- **Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n),\ f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. $\{s_i, t_i\}$ unifizierbar für $1 \leq i \leq n$**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n),\ g(t_1, \ldots, t_m)$ sind niemals unifb.**
- **Eine Variable x und ein Term t sind immer unifb. (mittels $\{x/t\}$)**

Unifikation

Ein paar simple Fakten

- **Jeder Term ist mit sich selbst unifizierbar (mittels id)**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n),\ f(t_1, \ldots, t_n)$ sind unifizierbar g.d.w. $\{s_i, t_i\}$ unifizierbar für $1 \leq i \leq n$**
- **Terme der Gestalt $f(s_1, \ldots, s_n),\ g(t_1, \ldots, t_m)$ sind niemals unifb.**
- **Eine Variable x und ein Term t sind immer unifb. (mittels $\{x/t\}$)**
- **Eine Variable x und ein Term $t \neq x$, der x enthält, sind niemals unifizierbar**

Allgemeinster Unifikator

Definition: Allgemeinster Unifikator

(*engl.:* most general unifier, MGU)

Allgemeinster Unifikator

Definition: Allgemeinster Unifikator

(*engl.:* most general unifier, MGU)

μ is ein allgemeinster Unifikator von T, falls:

- μ ist Unifikator von T, und
- für alle Unifikatoren ν von T existiert eine Substitution ρ, so daß

$$\nu = \rho \circ \mu$$

(d.h. ν ist spezieller als μ)

Allgemeinster Unifikator

Theorem

- **Ist $T \neq \emptyset$ unifizierbar,**

  dann gibt es einen idempotenten, allgemeinsten Unifikator von T

Allgemeinster Unifikator

Theorem

- **Ist $T \neq \emptyset$ unifizierbar,**

  dann gibt es einen idempotenten, allgemeinsten Unifikator von T

- **Dieser ist bis auf Variablenumbenennung eindeutig bestimmt.**

Allgemeinster Unifikator

Theorem

- **Ist $T \neq \emptyset$ unifizierbar,**

  dann gibt es einen idempotenten, allgemeinsten Unifikator von T

- **Dieser ist bis auf Variablenumbenennung eindeutig bestimmt.**

- **Der Aufwand zu seiner Berechnung ist linear in der Größe von T (verlangt geschickte Repräsentation)**

Allgemeinster Unifikator

Theorem

- Ist $T \neq \emptyset$ unifizierbar,

  dann gibt es einen idempotenten, allgemeinsten Unifikator von T
- Dieser ist bis auf Variablenumbenennung eindeutig bestimmt.
- Der Aufwand zu seiner Berechnung ist linear in der Größe von T (verlangt geschickte Repräsentation)
- Unifikator kann exponentiell groß sein (in der Größe von T)

Unifikationsalgorithmus

Form des Algorithmus

- Dargestellt in Form von Transformationsregeln
- Regeln operieren auf Menge von Gleichungen
- Regeln erhalten die (allgemeinsten) Unifikatoren

Unifikationsalgorithmus

Form des Algorithmus

- Dargestellt in Form von Transformationsregeln
- Regeln operieren auf Menge von Gleichungen
- Regeln erhalten die (allgemeinsten) Unifikatoren

Eingabe

Termmenge: $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$

Gleichungsmenge: $R = \{y = t_1, \ldots, y = t_n\}$ **wobei** $y \in T$ **oder** y **neu**

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $\dfrac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $$\frac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

2 $$\frac{R \cup \{s = s\}}{R}$$

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $$\frac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

2 $$\frac{R \cup \{s = s\}}{R}$$

3 $$\frac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}}{R \cup \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}}$$

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $$\frac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

2 $$\frac{R \cup \{s = s\}}{R}$$

3 $$\frac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}}{R \cup \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}}$$

4 $$\frac{R \cup \{x = t\}}{R\{x/t\} \cup \{x = t\}}$$ **fall x eine Variable, x in R, x nicht in t**

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $\dfrac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

2 $\dfrac{R \cup \{s = s\}}{R}$

3 $\dfrac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}}{R \cup \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}}$

4 $\dfrac{R \cup \{x = t\}}{R\{x/t\} \cup \{x = t\}}$ **fall x eine Variable, x in R, x nicht in t**

5 $\dfrac{R \cup \{x = y\}}{R\{x/y\} \cup \{x = y\}}$ **fall x, y eine Variablen, x in R, $x \neq y$**

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $\dfrac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

2 $\dfrac{R \cup \{s = s\}}{R}$

3 $\dfrac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}}{R \cup \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}}$

4 $\dfrac{R \cup \{x = t\}}{R\{x/t\} \cup \{x = t\}}$ **fall x eine Variable, x in R, x nicht in t**

5 $\dfrac{R \cup \{x = y\}}{R\{x/y\} \cup \{x = y\}}$ **fall x, y eine Variablen, x in R, $x \neq y$**

6 $\dfrac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m)\}}{\textbf{FAIL}}$

Unifikationsalgorithmus: Regeln

1 $$\frac{R \cup \{t = x\}}{R \cup \{x = t\}}$$ **fall x eine Variable, t keine Variable**

2 $$\frac{R \cup \{s = s\}}{R}$$

3 $$\frac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = f(t_1, \ldots, t_n)\}}{R \cup \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}}$$

4 $$\frac{R \cup \{x = t\}}{R\{x/t\} \cup \{x = t\}}$$ **fall x eine Variable, x in R, x nicht in t**

5 $$\frac{R \cup \{x = y\}}{R\{x/y\} \cup \{x = y\}}$$ **fall x, y eine Variablen, x in R, $x \neq y$**

6 $$\frac{R \cup \{f(s_1, \ldots, s_n) = g(t_1, \ldots, t_m)\}}{\textbf{FAIL}}$$

6 $$\frac{R \cup \{x = t\}}{\textbf{FAIL}}$$ **falls x in t**

Unifikationsalgorithmus: Theorem

Theorem

- **Der Unifikationsalgorithmus terminiert**

Unifikationsalgorithmus: Theorem

Theorem

- **Der Unifikationsalgorithmus terminiert**
- **Falls das Ergebnis FAIL ist, hat die Eingabe keinen Unifikator**

Unifikationsalgorithmus: Theorem

Theorem

- Der Unifikationsalgorithmus terminiert
- Falls das Ergebnis FAIL ist, hat die Eingabe keinen Unifikator
- Sonst hat die Menge der Gleichungen die Form

$$\{x_1 = t_1, \dots, x_k = t_k\}$$

und

$$\{x_1/t_1, \dots, x_k/t_k\}$$

ist ein allgemeinster Unifikatior für die Eingabe

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- **Substitutionen**

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- **Substitutionen**
- **Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln**

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- **Substitutionen**
- **Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln**
- **Substitutionstheorem**

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- Substitutionen
- Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln
- Substitutionstheorem
- Kollisionsfreie Substitutionen

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- Substitutionen
- Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln
- Substitutionstheorem
- Kollisionsfreie Substitutionen
- Gebundene Umbenennung

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- Substitutionen
- Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln
- Substitutionstheorem
- Kollisionsfreie Substitutionen
- Gebundene Umbenennung
- Unifikator

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- Substitutionen
- Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln
- Substitutionstheorem
- Kollisionsfreie Substitutionen
- Gebundene Umbenennung
- Unifikator
- Allgemeinster Unifikator

Zusammenfassung: Substitutionen und Unifikation

- Substitutionen
- Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln
- Substitutionstheorem
- Kollisionsfreie Substitutionen
- Gebundene Umbenennung
- Unifikator
- Allgemeinster Unifikator
- Unifikationsalgorithmus