Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
– Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $Atom_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
- **1** $\in For_\Sigma$ **und** **0** $\in For_\Sigma$
- **Wenn** $A, B \in For_\Sigma$, **dann auch**

  $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ **in** For_Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
– Var eine Menge von Variablen

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $Atom_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
- $1 \in For_\Sigma$ und $0 \in For_\Sigma$
- Wenn $A, B \in For_\Sigma$, dann auch

  $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \longrightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ in For_Σ
- Wenn $A \in For_\Sigma$ und $x \in Var$, dann

  $\forall x A$, $\exists x A$ in For_Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$bruder(\,kingJohn, richard\,) \quad \rightarrow \quad bruder(\,richard, kingJohn\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}(\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Term}}, \underbrace{richard}_{\textbf{Term}}) \quad \longrightarrow \quad \underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}(\underbrace{richard}_{\textbf{Term}}, \underbrace{kingJohn}_{\textbf{Term}})$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{bruder}_{\textsf{Prädikat}}(\,\underbrace{kingJohn}_{\textsf{Term}},\underbrace{richard}_{\textsf{Term}}\,)}_{\textsf{Atom}} \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\underbrace{bruder}_{\textsf{Prädikat}}(\,\underbrace{richard}_{\textsf{Term}},\underbrace{kingJohn}_{\textsf{Term}}\,)}_{\textsf{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{bruder}_{\textsf{Prädikat}}(\underbrace{kingJohn}_{\textsf{Term}},\underbrace{richard}_{\textsf{Term}})}_{\textsf{Atom}} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{bruder}_{\textsf{Prädikat}}(\underbrace{richard}_{\textsf{Term}},\underbrace{kingJohn}_{\textsf{Term}})}_{\textsf{Atom}}}_{\textsf{Komplexe Formel}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

„Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau“

$$\underbrace{\forall \quad \underbrace{x}_{\textbf{Variable}} \quad \underbrace{(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))}_{\textbf{Formel (Skopus)}}}_{\textbf{Formel}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

„Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau“

$$\underbrace{\forall \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))}_{\text{Formel (Skopus)}}}_{\text{Formel}}$$

„Jemand, der in Landau studiert ist schlau“

$$\underbrace{\exists \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(studiertIn(x, landau) \land schlau(x))}_{\text{Formel (Skopus)}}}_{\text{Formel}}$$

Freie und gebundene Variablen

Definition: Freie / gebundene Variable

Ein Vorkommen einer Variablen x heißt

- **gebunden, wenn sie im Skopus einer Quantifizierung $\forall x$ / $\exists x$ ist**
- **frei sonst**

Freie und gebundene Variablen

Definition: Freie / gebundene Variable

Ein Vorkommen einer Variablen x heißt

- **gebunden**, wenn sie im Skopus einer Quantifizierung $\forall x$ / $\exists x$ ist
- **frei** sonst

Beispiel

$$p(z) \longrightarrow \forall x\, (q(x, z) \land \exists z\, r(y, z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden (sollte vermieden werden!)

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogisches Modell (Interpretation)

Paar $\langle U, A \rangle$ mit

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogisches Modell (Interpretation)

Paar $\langle U, A \rangle$ mit

U**: eine nicht-leere Menge (Universum)**

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogisches Modell (Interpretation)

Paar $\langle U, A \rangle$ mit

U: eine nicht-leere Menge (Universum)

A: eine Interpretationsfunktion – sie interpretiert

- **Variablen:** **durch ein Element des Universums**
- **Prädikate:** **durch eine Relation auf dem Universum (mit passender Stelligkeit)**
- **Funktionen:** **durche eine Funktion auf dem Universium (mit passender Stelligkeit)**

Semantik der Prädikatenlogik

Bemerkungen

- Im allgemeinen ist das Universum U einen prädikatenlogischen Modells unendlich

Semantik der Prädikatenlogik

Bemerkungen

- Im allgemeinen ist das Universum U einen prädikatenlogischen Modells unendlich
- Auch schon für ein endliches U gibt es eine riesige Zahl verschiedener Modelle

Semantik der Prädikatenlogik

Notation

$I = \langle U, A \rangle$ **ein prädikatenlogisches Modell**

Dann

$$s^I \quad \textbf{für} \quad A(s)$$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik eines Terms t

Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik eines Terms t

Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

- $t = x$ **eine Variable:** $\quad I(t) = x^I$
- $t = c$ **eine Konstante:** $\quad I(t) = c^I$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik eines Terms t

Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

- $t = x$ **eine Variable:** $I(t) = x^I$
- $t = c$ **eine Konstante:** $I(t) = c^I$
- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$**:** $I(t) = f^I(I(t_1), \ldots, I(t_n))$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik einer Formel

Semantik $I(F)$ einer Formel F in einem Modell I
ist einer der Wahrheitswerte $true$ und $false$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik einer Formel

Semantik $I(F)$ einer Formel F in einem Modell I ist einer der Wahrheitswerte $true$ und $false$

$$
\begin{aligned}
I(1) &= true \\
I(0) &= false \\
I(p(t_1, \ldots, t_n)) &= p^I(I(t_1), \ldots, I(t_n))
\end{aligned}
$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(\neg F) = \begin{cases} \mathit{false} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \\ \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{false} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(F \wedge G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \textbf{ und } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \vee G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \textbf{ oder } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(F \rightarrow G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{false} \textbf{ oder } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \leftrightarrow G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = I(G) \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \textbf{ für alle } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \textbf{ für } \textbf{alle } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(\exists x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \textbf{ für } \textbf{mindestens ein } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \text{ für alle } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(\exists x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \text{ für mindestens ein } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Notation

$I_{x/d}$ **identisch mit** I **mit der Ausnahme, dass** $x^{I_{x/d}} = d$

Universelle Quantifizierung

Intuition

$\forall x F$ **entspricht in etwa der (unendlichen) Konjunktion aller Instanzen von** F

Universelle Quantifizierung

Intuition

$\forall x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Konjunktion aller Instanzen von F

Beispiel

$$\forall\, x\, (studiertIn(x, koblenz) \rightarrow schlau(x))$$

entspricht

$$\begin{array}{ll} & studiertIn(student1, koblenz) \rightarrow schlau(student1) \\ \wedge & studiertIn(student2, koblenz) \rightarrow schlau(student2) \\ \wedge & studiertIn(koblenz, koblenz) \rightarrow schlau(koblenz) \\ \wedge & \ldots \end{array}$$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\forall$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\wedge$ **mit** $\forall$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\wedge$ mit $\forall$

Beispiel

Richtig: $\forall x\,(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))$

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\land$ mit $\forall$

Beispiel

Richtig: $\forall x\,(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))$

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

Falsch: $\forall x\,(studiertIn(x, koblenz) \land schlau(x))$

"Alle studieren in Koblenz und sind schlau", d.h.,

"Alle studieren in Koblenz und alle sind schlau"

Existenzielle Quantifizierung

Intuition

$\exists x F$ **entspricht in etwa der (unendlichen) Disjunktion aller Instanzen von** F

Existenzielle Quantifizierung

Intuition

$\exists x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Disjunktion aller Instanzen von F

Beispiel

$$\exists\, x\ (studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))$$

entspricht

$$\begin{array}{ll} & studiertIn(student1, landau) \wedge schlau(student1) \\ \vee & studiertIn(student2, landau) \wedge schlau(student2) \\ \vee & studiertIn(landau, landau) \wedge schlau(landau) \\ \vee & \ldots \end{array}$$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\exists$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler Verwendung von $\longrightarrow$ mit $\exists$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler Verwendung von $\rightarrow$ mit $\exists$

Beispiel

Richtig: $\exists x\,(studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))$

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler Verwendung von $\longrightarrow$ mit $\exists$

Beispiel

Richtig: $\exists x\,(studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))$

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

Falsch:

$\exists x\,(studiertIn(x, landau) \longrightarrow schlau(x))$

"Es gibt jemanden, der, falls er/sie in Landau studiert, schlau ist"

Trivial wahr, wenn es irgendjemanden gibt, der nicht in Landau studiert

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$	**ist das gleiche wie**	$\forall y \forall x$
$\exists x \exists y$	**ist das gleiche wie**	$\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ **ist nicht das gleiche wie** $\forall y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ **ist nicht das gleiche wie** $\forall y \exists x$

Beispiel

$\exists x \forall y \, loves(x, y)$

Es gibt eine Person, die jeden Menschen in der Welt liebt (einschließlich sich selbst)

$\forall y \exists x \, loves(x, y)$

Jeder Mensch wird von mindestens einer Person geliebt

(Beides hoffentliche wahr aber verschieden:
das erste impliziert das zweite aber nicht umgekehrt)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ **ist nicht das gleiche wie** $\forall y \exists x$

Beispiel

$\forall x \exists y \, mutter(y, x)$

Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \, mutter(y, x)$

Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ \ldots$	**ist das gleiche wie**	$\neg\exists x\, \neg \ldots$
$\exists x \ \ldots$	**ist das gleiche wie**	$\neg\forall x\, \neg \ldots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ \ldots$	**ist das gleiche wie**	$\neg\exists x \neg \ldots$
$\exists x \ \ldots$	**ist das gleiche wie**	$\neg\forall x \neg \ldots$

Beispiel

$\forall x \ mag(x, eiskrem)$	**ist das gleiche wie**	$\neg\exists x \ \neg mag(x, eiskrem)$
$\exists x \ mag(x, broccoli)$	**ist das gleiche wie**	$\neg\forall x \ \neg mag(x, broccoli)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x\,(\ldots \wedge \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x\, (\ldots \wedge \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\, (studiert(x) \wedge arbeitet(x))$ **ist das gleiche wie**

$(\forall x\ studiert(x)) \wedge (\forall x\ arbeitet(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x\,(\ldots \vee \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x\,(\ldots \vee \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \vee (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(eiskrem(x) \vee broccoli(x))$ **ist das gleiche wie**

$(\exists x\; eiskrem(x)) \vee (\exists x\; broccoli(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x\ (\ldots \vee \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x\, (\ldots \vee \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \ \vee\ (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\, (eiskrem(x) \vee broccoli(x))$ **ist NICHT das gleiche wie**

$(\forall x\ eiskrem(x)) \ \vee\ (\forall x\ broccoli(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert **NICHT** über $\wedge$

$\exists x\,(\ldots \wedge \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \;\wedge\; (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x\,(\ldots \wedge \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \wedge (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(gerade(x) \wedge ungerade(x))$ **ist NICHT das gleiche wie**

$(\exists x\; gerade(x)) \wedge (\exists x\; ungerade(x))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister“**

  $\forall x \forall y \; (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister"**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

- **„bruder" ist symmetrisch**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister"**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

- **„bruder" ist symmetrisch**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$

- **„Mütter sind weibliche Elternteile"**

  $\forall x \forall y\ (mutter(x, y) \leftrightarrow (weiblich(x) \land elter(x, y)))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister"**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \longrightarrow geschwister(x, y))$

- **„bruder" ist symmetrisch**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$

- **„Mütter sind weibliche Elternteile"**

  $\forall x \forall y\ (mutter(x, y) \leftrightarrow (weiblich(x) \wedge elter(x, y)))$

- **„Ein Cousin ersten Grades ist das Kind eines Geschwisters eines Elternteils"**

  $\forall x \forall y\ (cousin1(x, y) \leftrightarrow$

  $\exists p \exists ps\ (elter(p, x) \wedge geschwister(ps, p) \wedge elter(ps, y)))$