Vorlesung

Logik für Informatiker

9. Prädikatenlogik

– Syntax und Semantik der Prädikatenlogik –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\longrightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)
- $\longleftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)
- **( )** die beiden Klammern

Syntax der Prädikatenlogik: Logische Zeichen

Wie in der Aussagenlogik

- 1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- 0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)
- ( ) die beiden Klammern

Quantoren

- $\forall$ Allquantor („für alle“)
- $\exists$ Existenzquantor („es gibt“)

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x, \; y, \; a, \; b, \; \ldots$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x,\ y,\ a,\ b,\ \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ mit

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x,\ y,\ a,\ b,\ \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **mit**

P: **Prädikatensymbole** **z.B.** $\mathit{bruderVon},\ >,\ =,\ \ldots$

F: **Funktionssymbole** **z.B.** $2,\ \mathit{koblenz},\ c,\ \mathit{sqrt},\ \mathit{leftLegOf},\ \ldots$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Definition: Variablenmenge Var

Abzählbare Menge von Variablensymbolen

z.B.: $x, y, a, b, \ldots$

Definition: Prädikatenlogische Signatur Σ

Paar $\Sigma = \langle P, F \rangle$ mit

P: **Prädikatensymbole** **z.B.** $\mathit{bruderVon}, >, =, \ldots$

F: **Funktionssymbole** **z.B.** $2, \mathit{koblenz}, c, \mathit{sqrt}, \mathit{leftLegOf}, \ldots$

Bemerkung

Das Gleichheitsprädikat kann enthalten sein
Es wird infix notiert

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Bemerkung

Funktions- und Prädikatensymbole haben ein Stelligkeit $n \geq 0$

Syntax der Prädikatenlogik: Vokabular

Bemerkung

Funktions- und Prädikatensymbole haben ein Stelligkeit $n \geq 0$

Definition: Konstante

Funktionsssymbole mit Stelligkeit $n = 0$ heißen Konstante

z.B. $2,\ koblenz,\ c$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge $Term_\Sigma$ der Terme über Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
- Var eine Menge von Variablen

Definition: Menge $Term_\Sigma$ der Terme über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $Var \subseteq Term_\Sigma$
- Wenn
  - $f \in F$
  - n die Stelligkeit von f
  - $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

  dann

  $f(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Bemerkungen

- **(Insbesondere) alle Konstanten in** $Term_\Sigma$

Syntax der Prädikatenlogik: Terme

Bemerkungen

- **(Insbesondere) alle Konstanten in $Term_\Sigma$**
- **Terme bezeichnen Elemente**

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Wenn

- $p \in P$
- n **die Stelligkeit von** p
- $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

dann

$$p(t_1, \ldots, t_n) \in Atom_\Sigma$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
- Var eine Menge von Variablen

Definition: Menge $Atom_\Sigma$ der Atome über Σ

Wenn

- $p \in P$
- n die Stelligkeit von p
- $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$

dann

$$p(t_1, \ldots, t_n) \in Atom_\Sigma$$

Bemerkung Atome haben Wahrheitswerte (im Unterschied zu Termen)

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\mathit{bruder}\,(\,\mathit{kingJohn}\,,\ \mathit{richardTheLionheart}\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}\,(\,\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Konstante}},\ \underbrace{richardTheLionheart}_{\textbf{Konstante}}\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}\,(\,\underbrace{\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Konstante}}}_{\textbf{Term}},\ \underbrace{\underbrace{richardTheLionheart}_{\textbf{Konstante}}}_{\textbf{Term}}\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiele

$$\underbrace{\underbrace{\mathit{bruder}}_{\textbf{Prädikat}}\,(\,\underbrace{\underbrace{\mathit{kingJohn}}_{\textbf{Konstante}}}_{\textbf{Term}},\ \underbrace{\underbrace{\mathit{richardTheLionheart}}_{\textbf{Konstante}}}_{\textbf{Term}}\,)}_{\textbf{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$>\quad (\,laenge(linkesBein(richard)),\ laenge(linkesBein(kingJohn))$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{>}_{\textbf{Prädikat}} \;(\underbrace{laenge}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\textbf{Konstante}})),\; \underbrace{laenge}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Konstante}})$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{>}_{\textbf{Prädikat}} \; (\underbrace{\underbrace{laenge}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\textbf{Konstante}}))}_{\textbf{Term}},\; \underbrace{\underbrace{laenge}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\textbf{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Konstante}})}_{\textbf{Term}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Atomare Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{>}_{\text{Prädikat}} \quad (\,\underbrace{\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{richard}_{\text{Konstante}}))}_{\text{Term}},\ \underbrace{\underbrace{laenge}_{\text{Funktion}}(\underbrace{linkesBein}_{\text{Funktion}}(\underbrace{kingJohn}_{\text{Konstante}}}_{\text{Term}}}_{\text{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

- $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
- Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ **eine prädikatenlogische Signatur**
– Var **eine Menge von Variablen**

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $Atom_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
- **1** $\in For_\Sigma$ **und** **0** $\in For_\Sigma$
- **Wenn** $A, B \in For_\Sigma$, **dann auch**

  $\neg A$, $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \longrightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ **in** For_Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

– $\Sigma = \langle P, F \rangle$ eine prädikatenlogische Signatur
– Var eine Menge von Variablen

Definition: Menge For_Σ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $Atom_\Sigma \subseteq For_\Sigma$
- $1 \in For_\Sigma$ und $0 \in For_\Sigma$
- Wenn $A, B \in For_\Sigma$, dann auch

  $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ in For_Σ
- Wenn $A \in For_\Sigma$ und $x \in Var$, dann

  $\forall x A$, $\exists x A$ in For_Σ

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$bruder(\, kingJohn, richard\,) \quad \rightarrow \quad bruder(\, richard, kingJohn\,)$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}(\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Term}}, \underbrace{richard}_{\textbf{Term}}) \longrightarrow \underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}(\underbrace{richard}_{\textbf{Term}}, \underbrace{kingJohn}_{\textbf{Term}})$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{bruder}_{\textsf{Prädikat}}(\,\underbrace{kingJohn}_{\textsf{Term}}, \underbrace{richard}_{\textsf{Term}}\,)}_{\textsf{Atom}} \longrightarrow \underbrace{\underbrace{bruder}_{\textsf{Prädikat}}(\,\underbrace{richard}_{\textsf{Term}}, \underbrace{kingJohn}_{\textsf{Term}}\,)}_{\textsf{Atom}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}(\underbrace{kingJohn}_{\textbf{Term}}, \underbrace{richard}_{\textbf{Term}})}_{\textbf{Atom}} \rightarrow \underbrace{\underbrace{bruder}_{\textbf{Prädikat}}(\underbrace{richard}_{\textbf{Term}}, \underbrace{kingJohn}_{\textbf{Term}})}_{\textbf{Atom}}}_{\textbf{Komplexe Formel}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

„Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau“

$$\underbrace{\forall \quad \underbrace{x}_{\textbf{Variable}} \quad \underbrace{(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))}_{\textbf{Formel (Skopus)}}}_{\textbf{Formel}}$$

Syntax der Prädikatenlogik: Komplexe Formeln

Beispiel

„Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau“

$$\underbrace{\forall \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(studiertIn(x, koblenz) \rightarrow schlau(x))}_{\text{Formel (Skopus)}}}_{\text{Formel}}$$

„Jemand, der in Landau studiert ist schlau“

$$\underbrace{\exists \underbrace{x}_{\text{Variable}} \underbrace{(studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))}_{\text{Formel (Skopus)}}}_{\text{Formel}}$$

Freie und gebundene Variablen

Definition: Freie / gebundene Variable

Ein Vorkommen einer Variablen x heißt

- **gebunden, wenn sie im Skopus einer Quantifizierung $\forall x$ / $\exists x$ ist**
- **frei sonst**

Freie und gebundene Variablen

Definition: Freie / gebundene Variable

Ein Vorkommen einer Variablen x heißt

- **gebunden**, wenn sie im Skopus einer Quantifizierung $\forall x$ / $\exists x$ ist
- **frei** sonst

Beispiel

$$p(z) \longrightarrow \forall x \, (q(x, z) \land \exists z \, r(y, z))$$

- x gebunden
- y frei
- z frei und gebunden (sollte vermieden werden!)

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogisches Modell (Interpretation)

Paar $\langle U, A \rangle$ mit

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogisches Modell (Interpretation)

Paar $\langle U, A \rangle$ mit

U**: eine nicht-leere Menge (Universum)**

Semantik der Prädikatenlogik

Definition: Prädikatenlogisches Modell (Interpretation)

Paar $\langle U, A \rangle$ mit

U: eine nicht-leere Menge (Universum)

A: eine Interpretationsfunktion – sie interpretiert

- **Variablen:** durch ein Element des Universums
- **Prädikate:** durch eine Relation auf dem Universum (mit passender Stelligkeit)
- **Funktionen:** durche eine Funktion auf dem Universium (mit passender Stelligkeit)

Semantik der Prädikatenlogik

Bemerkungen

- Im allgemeinen ist das Universum U einen prädikatenlogischen Modells unendlich

Semantik der Prädikatenlogik

Bemerkungen

- Im allgemeinen ist das Universum U einen prädikatenlogischen Modells unendlich
- Auch schon für ein endliches U gibt es eine riesige Zahl verschiedener Modelle

Semantik der Prädikatenlogik

Notation

$I = \langle U, A \rangle$ **ein prädikatenlogisches Modell**

Dann

$$s^I \quad \textbf{für} \quad A(s)$$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik eines Terms t

Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik eines Terms t

Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

- $t = x$ **eine Variable:** $\quad I(t) = x^I$
- $t = c$ **eine Konstante:** $\quad I(t) = c^I$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik eines Terms t

Element $I(t)$ aus U, das rekursiv definiert ist durch

- $t = x$ **eine Variable:** $\quad I(t) = x^I$
- $t = c$ **eine Konstante:** $\quad I(t) = c^I$
- $t = f(t_1, \ldots, t_n)$**:** $\quad I(t) = f^I(I(t_1), \ldots, I(t_n))$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik einer Formel

Semantik $I(F)$ einer Formel F in einem Modell I
ist einer der Wahrheitswerte $true$ und $false$

Semantik der Prädikatenlogik

Gegeben ein prädikatenlogisches Modell I

Definition: Semantik einer Formel

Semantik $I(F)$ einer Formel F in einem Modell I ist einer der Wahrheitswerte $true$ und $false$

$$\begin{aligned} I(1) &= true \\ I(0) &= false \\ I(p(t_1, \ldots, t_n)) &= p^I(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \end{aligned}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(\neg F) = \begin{cases} \mathit{false} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \\ \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{false} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(F \wedge G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \textbf{ und } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \vee G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{true} \textbf{ oder } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und (wie in der Aussagenlogik):

$$I(F \rightarrow G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = \mathit{false} \textbf{ oder } I(G) = \mathit{true} \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(F \leftrightarrow G) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I(F) = I(G) \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = true \textbf{ für } \textbf{alle } d \in U \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \textbf{ für alle } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(\exists x F) = \begin{cases} \mathit{true} & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = \mathit{true} \textbf{ für mindestens ein } d \in U \\ \mathit{false} & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Prädikatenlogik

und zusätzlich:

$$I(\forall x F) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = true \textbf{ für alle } d \in U \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$I(\exists x F) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad I_{x/d}(F) = true \textbf{ für mindestens ein } d \in U \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Notation

$I_{x/d}$ **identisch mit** I **mit der Ausnahme, dass** $x^{I_{x/d}} = d$

Universelle Quantifizierung

Intuition

$\forall x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Konjunktion aller Instanzen von F

Universelle Quantifizierung

Intuition

$\forall x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Konjunktion aller Instanzen von F

Beispiel

$$\forall\, x\, (studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))$$

entspricht

$$\begin{array}{ll} & studiertIn(student1, koblenz) \longrightarrow schlau(student1) \\ \wedge & studiertIn(student2, koblenz) \longrightarrow schlau(student2) \\ \wedge & studiertIn(koblenz, koblenz) \longrightarrow schlau(koblenz) \\ \wedge & \ldots \end{array}$$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\forall$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\wedge$ **mit** $\forall$

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\wedge$ **mit** $\forall$

Beispiel

Richtig: $\forall x\,(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))$

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

Universelle Quantifizierung

Faustregel

$\longrightarrow$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\forall$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\wedge$ **mit** $\forall$

Beispiel

Richtig: $\forall x\,(studiertIn(x, koblenz) \longrightarrow schlau(x))$

"Alle, die in Koblenz studieren, sind schlau"

Falsch: $\forall x\,(studiertIn(x, koblenz) \wedge schlau(x))$

"Alle studieren in Koblenz und sind schlau", d.h.,

"Alle studieren in Koblenz und alle sind schlau"

Existenzielle Quantifizierung

Intuition

$\exists x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Disjunktion aller Instanzen von F

Existenzielle Quantifizierung

Intuition

$\exists x F$ entspricht in etwa der (unendlichen) Disjunktion aller Instanzen von F

Beispiel

$$\exists\, x\, (studiertIn(x, landau) \land schlau(x))$$

entspricht

$$\begin{array}{ll} & studiertIn(student1, landau) \land schlau(student1) \\ \lor & studiertIn(student2, landau) \land schlau(student2) \\ \lor & studiertIn(landau, landau) \land schlau(landau) \\ \lor & \ldots \end{array}$$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\exists$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ **ist der logische (Top-level-)Operator mit** $\exists$

Häufiger Fehler **Verwendung von** $\longrightarrow$ **mit** $\exists$

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler

Verwendung von $\longrightarrow$ mit $\exists$

Beispiel

Richtig: $\exists x\,(studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))$

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

Existenzielle Quantifizierung

Faustregel

$\wedge$ ist der logische (Top-level-)Operator mit $\exists$

Häufiger Fehler Verwendung von $\longrightarrow$ mit $\exists$

Beispiel

Richtig: $\exists x\,(studiertIn(x, landau) \wedge schlau(x))$

"Es gibt jemand, der in Landau studiert und schlau ist"

Falsch:

$\exists x\,(studiertIn(x, landau) \longrightarrow schlau(x))$

"Es gibt jemanden, der, falls er/sie in Landau studiert, schlau ist"

Trivial wahr, wenn es irgendjemanden gibt, der nicht in Landau studiert

Eigenschaften von Quantoren

Quantoren gleicher Art kommutieren

$\forall x \forall y$	**ist das gleiche wie**	$\forall y \forall x$
$\exists x \exists y$	**ist das gleiche wie**	$\exists y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ **ist nicht das gleiche wie** $\forall y \exists x$

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ **ist nicht das gleiche wie** $\forall y \exists x$

Beispiel

$\exists x \forall y \, loves(x, y)$

Es gibt eine Person, die jeden Menschen in der Welt liebt (einschließlich sich selbst)

$\forall y \exists x \, loves(x, y)$

Jeder Mensch wird von mindestens einer Person geliebt

(Beides hoffentliche wahr aber verschieden:
das erste impliziert das zweite aber nicht umgekehrt)

Eigenschaften von Quantoren

Verschiedene Quantoren kommutieren NICHT

$\exists x \forall y$ **ist nicht das gleiche wie** $\forall y \exists x$

Beispiel

$\forall x \exists y \, mutter(y, x)$

Jeder hat eine Mutter (richtig)

$\exists y \forall x \, mutter(y, x)$

Es gibt eine Person, die die Mutter von jedem ist (falsch)

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \ldots$ **ist das gleiche wie** $\neg \exists x \neg \ldots$

$\exists x \ldots$ **ist das gleiche wie** $\neg \forall x \neg \ldots$

Eigenschaften von Quantoren

Dualität der Quantoren

$\forall x \; \ldots$ **ist das gleiche wie** $\neg\exists x \, \neg \ldots$

$\exists x \; \ldots$ **ist das gleiche wie** $\neg\forall x \, \neg \ldots$

Beispiel

$\forall x \; mag(x, eiskrem)$ **ist das gleiche wie** $\neg\exists x \, \neg mag(x, eiskrem)$

$\exists x \; mag(x, broccoli)$ **ist das gleiche wie** $\neg\forall x \, \neg mag(x, broccoli)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x\ (\ldots \wedge \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \wedge (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert über $\wedge$

$\forall x\, (\ldots \wedge \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \;\wedge\; (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\, (studiert(x) \wedge arbeitet(x))$ **ist das gleiche wie**

$(\forall x\; studiert(x)) \;\wedge\; (\forall x\; arbeitet(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\vee$

$\exists x\ (\ldots \vee \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\exists x \ldots)\ \vee\ (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert über $\lor$

$\exists x\,(\ldots \lor \ldots)$ **ist das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \lor (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\,(eiskrem(x) \lor broccoli(x))$ **ist das gleiche wie**

$(\exists x\; eiskrem(x)) \lor (\exists x\; broccoli(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x\,(\ldots \vee \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\forall$ distributiert NICHT über $\vee$

$\forall x\,(\ldots \vee \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\forall x \ldots) \vee (\forall x \ldots)$

Beispiel

$\forall x\,(eiskrem(x) \vee broccoli(x))$ **ist NICHT das gleiche wie**

$(\forall x\; eiskrem(x)) \vee (\forall x\; broccoli(x))$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\land$

$\exists x\,(\ldots \land \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \land (\exists x \ldots)$

Eigenschaften von Quantoren

$\exists$ distributiert NICHT über $\wedge$

$\exists x\, (\ldots \wedge \ldots)$ **ist NICHT das gleiche wie** $(\exists x \ldots) \;\wedge\; (\exists x \ldots)$

Beispiel

$\exists x\, (gerade(x) \wedge ungerade(x))$ **ist NICHT das gleiche wie**

$(\exists x\; gerade(x)) \;\wedge\; (\exists x\; ungerade(x))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister“**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister“**

  $$\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$$

- **„bruder“ ist symmetrisch**

  $$\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister“**

  $\forall x \forall y\, (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

- **„bruder“ ist symmetrisch**

  $\forall x \forall y\, (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$

- **„Mütter sind weibliche Elternteile“**

  $\forall x \forall y\, (mutter(x, y) \leftrightarrow (weiblich(x) \wedge elter(x, y)))$

Beispiele: Familienverhältnisse

- **„Brüder sind Geschwister“**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \rightarrow geschwister(x, y))$

- **„bruder“ ist symmetrisch**

  $\forall x \forall y\ (bruder(x, y) \leftrightarrow bruder(y, x))$

- **„Mütter sind weibliche Elternteile“**

  $\forall x \forall y\ (mutter(x, y) \leftrightarrow (weiblich(x) \land elter(x, y)))$

- **„Ein Cousin ersten Grades ist das Kind eines Geschwisters eines Elternteils“**

  $\forall x \forall y\ (cousin1(x, y) \leftrightarrow$

  $\exists p \exists ps\ (elter(p, x) \land geschwister(ps, p) \land elter(ps, y)))$

Das Gleichheitsprädikat

Semantik

Für alle Interpretationen I gilt:

$$I(term_1 = term_2) \;=\; true$$

genau dann, wenn

$$I(term_1) \;=\; I(term_2)$$

Das Gleichheitsprädikat

Semantik

Für alle Interpretationen I gilt:

$$I(term_1 = term_2) \; = \; true$$

genau dann, wenn

$$I(term_1) \; = \; I(term_2)$$

Beispiele

$a = b$ **ist erfüllbar**

$a = a$ **ist allgemeingültig**

Das Gleichheitsprädikat

Beispiel

Formalisierung von „Bruder, der nicht nur Halbbruder ist“

$$
\begin{aligned}
\forall x \forall y\, bruder(x, y) \;\leftrightarrow\; (\neg(x = y) \wedge \\
\exists m \exists v\, (\neg(m = v) \wedge \\
elter(m, x) \wedge elter(v, x) \wedge \\
elter(m, y) \wedge elter(v, y)))
\end{aligned}
$$

Wichtige Begriffe für Prädikatenlogik

Definition

– Allgemeingültigkeit

– Erfüllbarkeit

– Unerfüllbarkeit

– Logische Folgerung

– Logische Äquivalenz

für Prädikatenlogik genauso definiert wie für Aussagenlogik

(nur mit prädikatenlogischen Modellen statt aussagenlogischen)

Ausblick: Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik (z.B. Resolution)

- **Wenn $KB \vdash F$, dann $KB \models F$**
- **Wenn $KB \models F$, dann $KB \vdash F$**

Ausblick: Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit

Kalküle

Es gibt korrekte und vollständige Kalküle für Prädikatenlogik (z.B. Resolution)

- **Wenn $KB \vdash F$, dann $KB \models F$**
- **Wenn $KB \models F$, dann $KB \vdash F$**

Aber diese Kalküle können die Erfüllbarkeit von Formeln NICHT entscheiden

Ausblick: Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit

Aussagenlogik

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit **ENTSCHEIDBAR**

Ausblick: Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit

Aussagenlogik

Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit ENTSCHEIDBAR

Prädikatenlogik

- **Menge der allgemeingültigen Formeln AUFZÄHLBAR**
- **Menge der unerfüllbaren Formeln AUFZÄHLBAR**
- **Menge der erfüllbaren Formeln NICHT AUFZÄHLBAR**

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- **Prädikatenlogische Signatur**

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- **Prädikatenlogische Signatur**
- **Term, Atom, Formel**

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- **Prädikatenlogische Signatur**
- **Term, Atom, Formel**
- **Prädikatenlogisches Modell**

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- **Prädikatenlogische Signatur**
- **Term, Atom, Formel**
- **Prädikatenlogisches Modell**
- **Auswertung von Formeln in Modellen**
- **Eigenschaften von Quantoren**
  (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\land$, $\lor$

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- Prädikatenlogische Signatur
- Term, Atom, Formel
- Prädikatenlogisches Modell
- Auswertung von Formeln in Modellen
- Eigenschaften von Quantoren
  (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge$, $\vee$
- Gleichheitsprädikat

Zusammenfassung: Syntax und Semantik

- **Prädikatenlogische Signatur**
- **Term, Atom, Formel**
- **Prädikatenlogisches Modell**
- **Auswertung von Formeln in Modellen**
- **Eigenschaften von Quantoren (Vertauschbarkeit untereinander und mit $\wedge$, $\vee$**
- **Gleichheitsprädikat**
- **Entscheidbarkeit der Erfüllbarkeit von Formeln**