Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- **Die Regeln sind alle deterministisch**

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- **Die Regeln sind alle deterministisch**
- **Der Kalkül aber nicht:**
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „α vor β“

Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- **Die Regeln sind alle deterministisch**
- **Der Kalkül aber nicht:**
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „α vor β“

Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in Einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**
- **B ein Ast von T**

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**
- **B ein Ast von T**
- **F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist**

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- **T ein Tableau für M**
- **B ein Ast von T**
- **F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist**

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten 1 besteht, ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B oder in M, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß
der auf F anwendbaren Regel (α oder β)

Dann ist T' ein Tableau für M

Formale Definition des Kalküls

Nota bene

Alle Äste in einem Tableau für M enthalten implizit alle Formeln in M

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \quad \in \quad B \cup M$$

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \quad \in \quad B \cup M$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus für M ist geschlossen, wenn

$$F, \neg F \in B \cup M$$

Definition: Geschlossenes Tableau

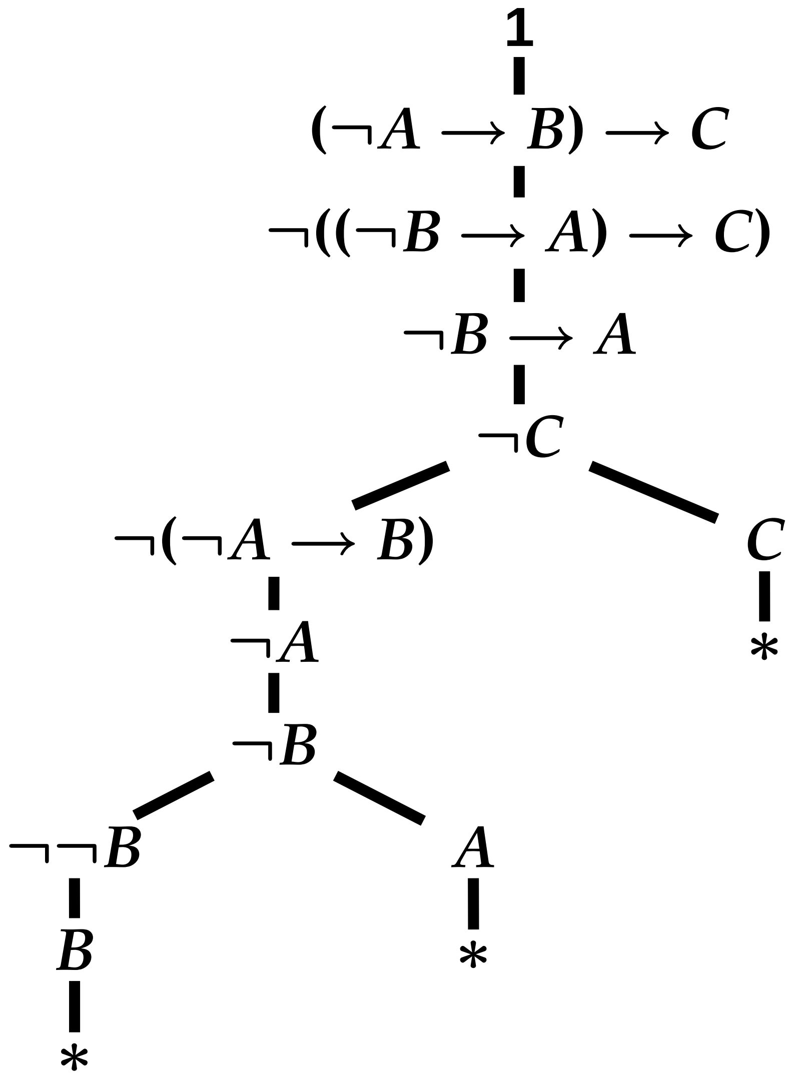
Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für M, das geschlossen ist,
ist ein Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M

Beispiel: Nun formal richtig

$$M \;=\; \neg(((\neg A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow C))$$



Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Eine Formelmenge M ist unerfüllbar

genau dann, wenn

es einen Tableaubeweis für (die Unerfüllbarkeit von) M gibt

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist

Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für eine erfüllbare Formelmenge M ist erfüllbar

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Also Kein geschlossenes Tableau für erfüllbare Formelmenge

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist

Lemma

B offener Ast in voll expandiertem Tableau, dann $B \cup M$ erfüllbar

Also Voll expandierte Tableau für unerfüllbares M ist geschlossen

Klauseltableau

M **eine Menge von Klauseln**

Klauseltableau

M eine Menge von Klauseln

Änderungen

- **Keine α-Regel**

Klauseltableau

M **eine Menge von Klauseln**

Änderungen

- **Keine α-Regel**
- **Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad >2 haben**

Klauseltableau

M **eine Menge von Klauseln**

Änderungen

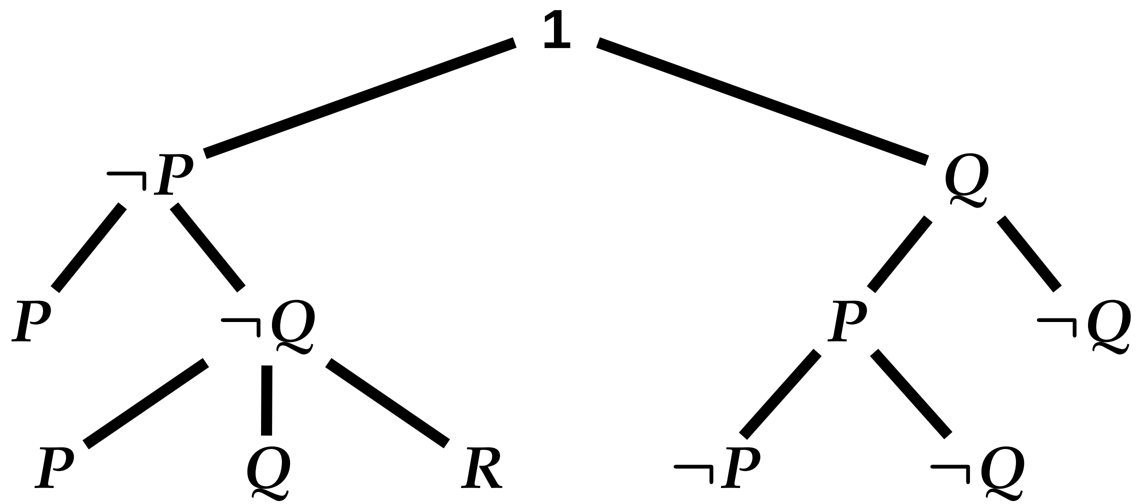
- **Keine α-Regel**
- **Erweiterungsregel kann Verzweigungsgrad $>$2 haben**
- **Alle Knoten im Tableau enthalten Literale**

Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{ \{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\} \}$$

Klauseltableau: Beispiel

$$M = \{\,\{P, Q, R\}, \{\neg R\}, \{\neg P, Q\}, \{P, \neg Q\}, \{\neg P, \neg Q\}\,\}$$



Klauseltableau: Einschränkungen des Suchraums

Regularität

Kein Literal darf auf einem Ast mehr als einmal vorkommen