Vorlesung

Logik für Informatiker

5. Aussagenlogik

– Normalformen –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Normalformen

Definition: Literal

- **Atom (aussagenlogische Variable) oder**
- **die Negation eines Atoms**

Normalformen

Definition: Literal

- **Atom (aussagenlogische Variable) oder**
- **die Negation eines Atoms**

Definition: Klausel

Eine Disjunktion von Literalen

- **mehrstellige Disjunktionen** $(A \vee \neg B \vee C)$
- **einstellige Disjunktionen** A
- **die nullstellige Disjunktion (leere Klausel)** **0**

Konjunktive Normalform

Definition: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen,
d.h., eine Konjunktion von Klauseln

Konjunktive Normalform

Definition: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen,
d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Konjunktive Normalform

Definition: Konjunktive Normalform (KNF)

Eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen,
d.h., eine Konjunktion von Klauseln

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele

- $(A \vee \neg B) \;\wedge\; (B \vee \neg C \vee \neg D)$
- $A \vee B$
- $A \wedge (B \vee C)$
- $A \wedge B$
- **1**

Disjunktive Normalform

Definition: Disjunktive Normalform (DNF)

Eine Disjunktionen von Konjunktionen von Literalen

mehrstellig, einstellig oder nullstellig

Beispiele

- $(A \land \neg B) \lor (B \land \neg C \land \neg D)$
- $A \land B$
- $A \lor (B \land C)$
- $A \lor B$
- **0**

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- **Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es**
  - **eine äquivalente Formel in KNF**
  - **eine äquivalente Formel in DNF**

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- **Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es**
  - **eine äquivalente Formel in KNF**
  - **eine äquivalente Formel in DNF**
- **Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig**
- **Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden**
  - **Disjunktionen in der KNF entsprechen den Zeilen mit $true$**
  - **Konjunktionen in der DNF entsprechen den Zeilen mit $false$**

Konjunktive und Disjunktive Normalform

Eigenschaften

- Zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es
  - eine äquivalente Formel in KNF
  - eine äquivalente Formel in DNF
- Diese äquivalenten Formeln in DNF bzw. KNF sind nicht eindeutig
- Solche Formeln können aus einer Wahrheitstafel abgelesen werden
  - Disjunktionen in der KNF entsprechen den Zeilen mit $true$
  - Konjunktionen in der DNF entsprechen den Zeilen mit $false$
- Solche Formeln können durch Umformungen hergestellt werden

Umformung in KNF

Vier Schritte

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $$A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

2. **Elimination von $\rightarrow$**

   Verwende $A \rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \lor B$

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $\quad A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$

2. **Elimination von $\longrightarrow$**

   Verwende $\quad A \longrightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \vee B$

3. **„Nach innen schieben“ von $\neg$**

   Verwende **de Morgans Regeln und** $\neg\neg A \quad \equiv \quad A$

Umformung in KNF

Vier Schritte

1. **Elimination von $\leftrightarrow$**

   Verwende $\quad A \leftrightarrow B \quad \equiv \quad (A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$

2. **Elimination von $\rightarrow$**

   Verwende $\quad A \rightarrow B \quad \equiv \quad \neg A \lor B$

3. **„Nach innen schieben“ von $\neg$**

   Verwende **de Morgans Regeln und** $\neg\neg A \quad \equiv \quad A$

4. **„Nach innen schieben“ von $\lor$**

   Verwende **Distributivität von $\lor$ über $\land$**

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \;\wedge\; ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\longleftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \;\wedge\; ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

2. Elimination von $\longrightarrow$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \;\wedge\; (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \ \wedge \ ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

2. Elimination von $\longrightarrow$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \ \wedge \ (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

3. Nach innen schieben von $\neg$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \ \wedge \ ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

Umformung in KNF: Beispiel

0. Gegeben

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$

1. Elimination von $\leftrightarrow$

$$(B_{1,1} \longrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \ \wedge \ ((P_{1,2} \vee P_{2,1}) \longrightarrow B_{1,1})$$

2. Elimination von $\longrightarrow$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \ \wedge \ (\neg(P_{1,2} \vee P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

3. Nach innen schieben von $\neg$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \ \wedge \ ((\neg P_{1,2} \wedge \neg P_{2,1}) \vee B_{1,1})$$

4. Nach innen schieben von $\vee$

$$(\neg B_{1,1} \vee P_{1,2} \vee P_{2,1}) \ \wedge \ (\neg P_{1,2} \vee B_{1,1}) \ \wedge \ (\neg P_{2,1} \vee B_{1,1})$$