Vorlesung

Logik für Informatiker

4. Aussagenlogik

– Syntax und Semantik der Aussagenlogik –

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

1 **Symbol für den Wahrheitswert „wahr“**

0 **Symbol für den Wahrheitswert „falsch“**

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

- 1 **Symbol für den Wahrheitswert „wahr“**
- 0 **Symbol für den Wahrheitswert „falsch“**
- $\neg$ **Negationssymbol („nicht“)**

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

- **1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“**
- **0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“**
- **$\neg$ Negationssymbol („nicht“)**
- **$\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)**
- **$\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)**
- **$\longrightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann“)**
- **$\longleftrightarrow$ Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)**

Syntax der Aussagenlogik: Logische Zeichen

- **1** **Symbol für den Wahrheitswert „wahr“**
- **0** **Symbol für den Wahrheitswert „falsch“**
- $\neg$ **Negationssymbol („nicht“)**
- $\wedge$ **Konjunktionssymbol („und“)**
- $\vee$ **Disjunktionssymbol („oder“)**
- $\longrightarrow$ **Implikationssymbol („wenn . . . dann“)**
- $\longleftrightarrow$ **Symbol für Äquivalenz („genau dann, wenn“)**
- **( )** **die beiden Klammern**

Vokabular der Aussagenlogik: Signatur

Definition: Aussagenlogische Signatur

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Vokabular der Aussagenlogik: Signatur

Definition: Aussagenlogische Signatur

Abzählbare Menge von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}$$

Bezeichnungen für Symbole in Σ

- **atomare Aussagen**
- **Atome**
- **Aussagevariablen**

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge $For0_\Sigma$ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- **1** $\in For0_\Sigma$ **und** **0** $\in For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge $For0_\Sigma$ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$ **und** $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Definition: Menge $For0_\Sigma$ der Formeln über Σ

Die kleinste Menge mit:

- $1 \in For0_\Sigma$ **und** $0 \in For0_\Sigma$
- $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- **Wenn** $A, B \in For0_\Sigma$**, dann auch**

  $\neg A, \quad (A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \longrightarrow B), \quad (A \leftrightarrow B)$

  Elemente von $For0_\Sigma$

Beispiel: Formeln aus der Wumpus-Welt

Aussagenlogische Variablen

$P_{i,j}$ **bedeutet: "Grube in** $[i, j]$**"**
$B_{i,j}$ **bedeutet: "Luftzug in** $[i, j]$**"**

$$\neg P_{1,1} \qquad \neg B_{1,1} \qquad B_{2,1}$$

Beispiel: Formeln aus der Wumpus-Welt

Aussagenlogische Variablen

$P_{i,j}$ **bedeutet: "Grube in** $[i, j]$**"**
$B_{i,j}$ **bedeutet: "Luftzug in** $[i, j]$**"**

$$\neg P_{1,1} \qquad \neg B_{1,1} \qquad B_{2,1}$$

Formeln

"Gruben bewirken Luftzug in angrenzenden Feldern"

$$P_{1,2} \longrightarrow (B_{1,1} \wedge B_{1,3} \wedge B_{2,2})$$

"Luftzug in einem Feld gdw. es an eine Grube grenzt"

$$B_{1,1} \leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})$$
$$B_{2,1} \leftrightarrow (P_{1,1} \vee P_{2,2} \vee P_{3,1})$$

Induktion über Formelaufbau: Beispiel

Lemma

Ist $A \in For0_\Sigma$ und sind B, C Teilformeln von A, dann gilt

- C ist Teilformel von B, oder
- B ist Teilformel von C, oder
- B, C liegen getrennt

Beweis: Durch noethersche Induktion über den Formelaufbau

Semantik der Aussagenlogik

Σ eine aussagenlogische Signatur

Definition: Aussagenlogisches Modell (Interpretation)

Eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \longrightarrow \{true,\ false\}$$

Semantik der Aussagenlogik

Σ **eine aussagenlogische Signatur**

Definition: Aussagenlogisches Modell (Interpretation)

Eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \longrightarrow \{true, \, false\}$$

Beispiel

A	B	C
$true$	$true$	$false$

(Bei drei Symbolen gibt es 8 mögliche Modelle)

Semantik der Aussagenlogik

Definition: Auswertung von Formeln in einem Modell

Zu Modell / Interpretation I

$$val_I : For0_\Sigma \longrightarrow \{true, false\}$$

mit:

$$\begin{aligned} val_I(\mathbf{1}) &= true \\ val_I(\mathbf{0}) &= false \\ val_I(P) &= I(P) \qquad \textbf{für } P \in \Sigma \end{aligned}$$

Semantik der Aussagenlogik

und:

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} false & \textbf{falls} \quad val_I(A) = true \\ true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = false \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

und:

$$val_I(A \wedge B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = true \textbf{ und } val_I(B) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(A \vee B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = true \textbf{ oder } val_I(B) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

und:

$$val_I(A \rightarrow B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = false \textbf{ oder } val_I(B) = true \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(A \leftrightarrow B) = \begin{cases} true & \textbf{falls} \quad val_I(A) = val_I(B) \\ false & \textbf{sonst} \end{cases}$$

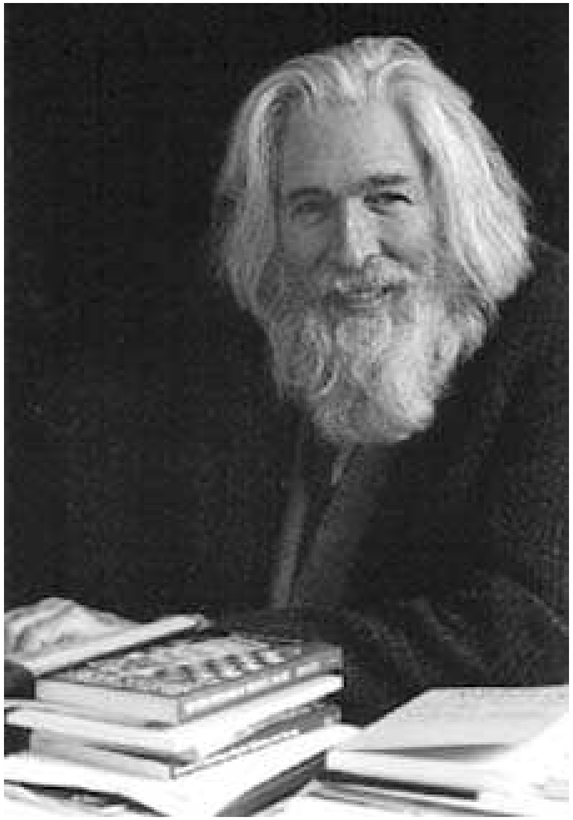
Wahrheitstafel für die logischen Operatoren

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \longrightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
$false$	$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$true$
$false$	$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$false$
$true$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$

Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

Disjunktive Formeln: Typ β



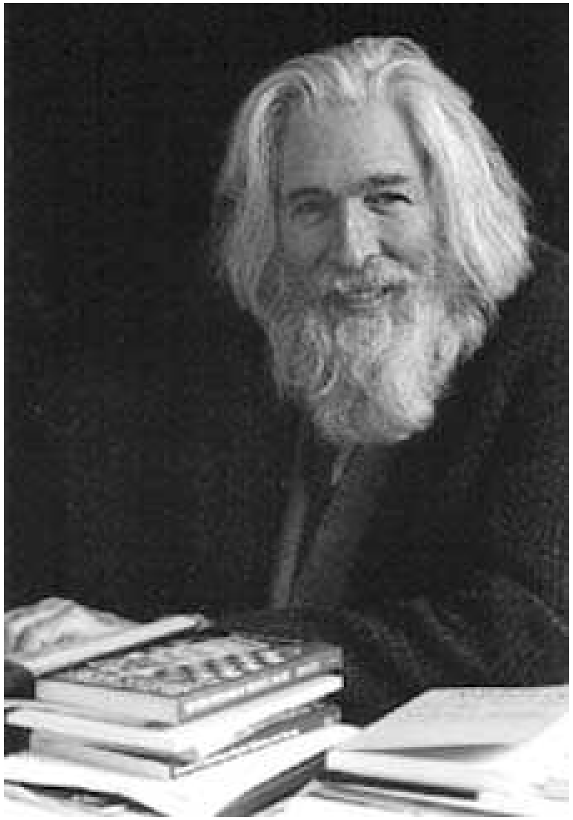
Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \wedge B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg(A \longrightarrow B)$

Disjunktive Formeln: Typ β



Raymond Smullyan

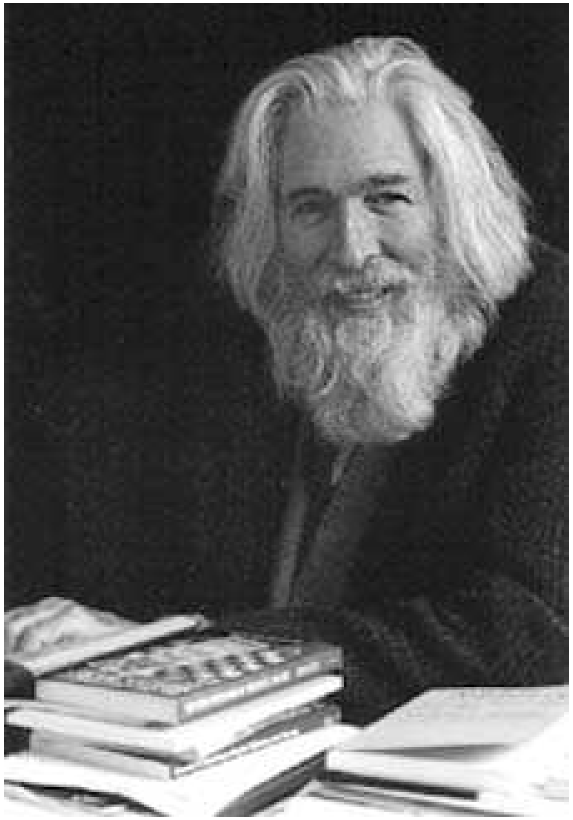
Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $\neg\neg A$
- $A \wedge B$
- $\neg(A \vee B)$
- $\neg(A \longrightarrow B)$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $\neg(A \wedge B)$
- $A \vee B$
- $A \longrightarrow B$



Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$
$\neg\neg A$	A	A

β	β_1	β_2
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \vee B$	A	B
$A \rightarrow B$	$\neg A$	B

Uniforme Notation: Beispiel der Anwendung

Alternative Art der Definition von val_I

$$val_I(\alpha) = \begin{cases} true & \text{falls} \quad val_I(\alpha_1) = true \text{ und } val_I(\alpha_2) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(\beta) = \begin{cases} true & \text{falls} \quad val_I(\beta_1) = true \text{ oder } val_I(\beta_2) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

Uniforme Notation: Beispiel der Anwendung

Alternative Art der Definition von val_I

$$val_I(\alpha) = \begin{cases} true & \text{falls} \quad val_I(\alpha_1) = true \text{ und } val_I(\alpha_2) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(\beta) = \begin{cases} true & \text{falls} \quad val_I(\beta_1) = true \text{ oder } val_I(\beta_2) = true \\ false & \text{sonst} \end{cases}$$

Umfaßt Definition von val_I für alle Operatoren außer: 1, 0, $\neg$, $\leftrightarrow$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Modell einer Formel

Modell / Interpretation I ist Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$, falls

$$val_I(A) = true$$

Modell einer Formel(menge)

Definition: Modell einer Formel

Modell / Interpretation I ist Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$, falls

$$val_I(A) = true$$

Definition: Modell einer Formelmenge

Modell / Interpretation I ist Modell einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$, falls

$$val_I(A) = true \qquad \text{für alle } A \in M$$

Zur Erinnerung: Logische Folgerbarkeit

Definition: Logische Folgerbarkeit

Formel A folgt logisch aus Formelmenge KB

gdw.

alle Modelle von KB sind auch Modell von A

Notation

$$KB \models \alpha$$

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$				
$false$	$false$	$true$				
$false$	$true$	$false$				
$false$	$true$	$true$				
$true$	$false$	$false$				
$true$	$false$	$true$				
$true$	$true$	$false$				
$true$	$true$	$true$				

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$			
$false$	$false$	$true$	$true$			
$false$	$true$	$false$	$false$			
$false$	$true$	$true$	$true$			
$true$	$false$	$false$	$true$			
$true$	$false$	$true$	$true$			
$true$	$true$	$false$	$true$			
$true$	$true$	$true$	$true$			

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$		
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$		
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$		
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$		
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$		
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$		
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$		
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$		

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$false$
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$

Ein erster Kalkül: Wahrheitstafelmethode

Beispielformel

$$\alpha = A \vee B \qquad KB = (A \vee C) \wedge (B \vee \neg C)$$

Überprüfen ob $KB \models \alpha$

A	B	C	$A \vee C$	$B \vee \neg C$	KB	α
$false$	$false$	$false$	$false$	$true$	$false$	$false$
$false$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$false$
$false$	$true$	$false$	$false$	$true$	$false$	$true$
$false$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$false$	$true$	$true$	$false$	$false$	$true$
$true$	$true$	$false$	$true$	$true$	$true$	$true$
$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$	$true$

Logische Äquivalenz

Definition: Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,

wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind, d.h.

$$\alpha \models \beta \quad \textbf{and} \quad \beta \models \alpha$$

Logische Äquivalenz

Definition: Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,

wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind, d.h.

$$\alpha \models \beta \quad \textbf{and} \quad \beta \models \alpha$$

Notation

$$\alpha \equiv \beta$$

Logische Äquivalenz

Definition: Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,

wenn sie in den gleichen Modellen wahr sind, d.h.

$$\alpha \models \beta \quad \textbf{and} \quad \beta \models \alpha$$

Notation

$$\alpha \equiv \beta$$

Beispiel

$$(A \longrightarrow B) \quad \equiv \quad (\neg B \longrightarrow \neg A) \qquad \textbf{(Kontraposition)}$$

Logische Äquivalenz

Substitutionstheorem

Wenn

- $A \equiv B$
- C' **ist das Ergebnis der Ersetzung einer Unterformel** A **in** C **durch** B**,**

dann

$$C \equiv C'$$

Logische Äquivalenz

Substitutionstheorem

Wenn

- $A \equiv B$
- C' **ist das Ergebnis der Ersetzung einer Unterformel** A **in** C **durch** B**,**

dann

$$C \equiv C'$$

Beispiel

$$A \vee B \quad \equiv \quad B \vee A$$

impliziert

$$(C \wedge (A \vee B)) \rightarrow D \quad \equiv \quad (C \wedge (B \vee A)) \rightarrow D$$

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \land B) \equiv (B \land A)$ **Kommutativität von $\land$**
- $(A \lor B) \equiv (B \lor A)$ **Kommutativität von $\lor$**
- $((A \land B) \land C) \equiv (A \land (B \land C))$ **Assoziativität von $\land$**
- $((A \lor B) \lor C) \equiv (A \lor (B \lor C))$ **Assoziativität von $\lor$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**
- $(A \vee A) \equiv A$ **Idempotenz für $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**
- $(A \vee A) \equiv A$ **Idempotenz für $\vee$**
- $\neg\neg A \equiv A$ **Doppelnegation**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$ **Kommutativität von $\wedge$**
- $(A \vee B) \equiv (B \vee A)$ **Kommutativität von $\vee$**
- $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$ **Assoziativität von $\wedge$**
- $((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$ **Assoziativität von $\vee$**
- $(A \wedge A) \equiv A$ **Idempotenz für $\wedge$**
- $(A \vee A) \equiv A$ **Idempotenz für $\vee$**
- $\neg\neg A \equiv A$ **Doppelnegation**
- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg B \longrightarrow \neg A)$ **Kontraposition**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \;\equiv\; (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \;\equiv\; ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \;\equiv\; (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $\neg(A \vee B) \;\equiv\; (\neg A \wedge \neg B)$ **de Morgans Regeln**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ **Distributivität von $\wedge$ über $\vee$**

Wichtige Äquivalenzen

- $(A \longrightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ **Elimination Implikation**
- $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$ **Elimination Äquivalenz**
- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ **de Morgans Regeln**
- $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ **Distributivität von $\wedge$ über $\vee$**
- $(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ **Distributivität von $\vee$ über $\wedge$**

Wichtige Äquivalenzen (zusammengefasst)

$(A \wedge B)$	$\equiv$	$(B \wedge A)$	**Kommutativität von $\wedge$**
$(A \vee B)$	$\equiv$	$(B \vee A)$	**Kommutativität von $\vee$**
$((A \wedge B) \wedge C)$	$\equiv$	$(A \wedge (B \wedge C))$	**Assoziativität von $\wedge$**
$((A \vee B) \vee C)$	$\equiv$	$(A \vee (B \vee C))$	**Assoziativität von $\vee$**
$(A \wedge A)$	$\equiv$	A	**Idempotenz für $\wedge$**
$(A \vee A)$	$\equiv$	A	**Idempotenz für $\vee$**
$\neg\neg A$	$\equiv$	A	**Doppelnegation**
$(A \longrightarrow B)$	$\equiv$	$(\neg B \longrightarrow \neg A)$	**Kontraposition**
$(A \longrightarrow B)$	$\equiv$	$(\neg A \vee B)$	**Elimination Implikation**
$(A \leftrightarrow B)$	$\equiv$	$((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A))$	**Elimination Äquivalenz**
$\neg(A \wedge B)$	$\equiv$	$(\neg A \vee \neg B)$	**de Morgans Regeln**
$\neg(A \vee B)$	$\equiv$	$(\neg A \wedge \neg B)$	**de Morgans Regeln**
$(A \wedge (B \vee C))$	$\equiv$	$((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	**Distributivität von $\wedge$ über**
$(A \vee (B \wedge C))$	$\equiv$	$((A \vee B) \wedge (A \vee C))$	**Distributivität von $\vee$ über**

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \land \neg A) \equiv \mathbf{0}$

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \equiv \mathbf{1}$ **Tertium non datur**

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \equiv \mathbf{1}$ **Tertium non datur**
- $(A \wedge \mathbf{1}) \equiv A$

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \wedge \neg A) \ \equiv \ \mathbf{0}$
- $(A \vee \neg A) \ \equiv \ \mathbf{1}$ **Tertium non datur**
- $(A \wedge \mathbf{1}) \ \equiv \ A$
- $(A \wedge \mathbf{0}) \ \equiv \ \mathbf{0}$

Wichtige Äquivalenzen mit 1 und 0

- $(A \land \neg A) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \lor \neg A) \equiv \mathbf{1}$ **Tertium non datur**
- $(A \land \mathbf{1}) \equiv A$
- $(A \land \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$
- $(A \lor \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- **(Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel**
- **Anwendung des Substitutionstheorems**

Ein zweiter Kalkül: Logische Umformung

Definition: Äquivalenzumformung

- (Wiederholte) Ersetzung einer (Unter-)Formel durch äquivalente Formel
- Anwendung des Substitutionstheorems

Theorem

Äquivalenzumformung bildet mit den aufgelisteten wichtigen Äquivalenzen einen vollständigen Kalkül:

Wenn A, B logisch äquivalent sind, kann A in B umgeformt werden

Allgemeingültigkeit

Definition: Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in allen Modellen wahr ist

Allgemeingültigkeit

Definition: Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in allen Modellen wahr ist

Notation

$$\models A$$

Allgemeingültigkeit

Definition: Allgemeingültigkeit

Eine Formel ist allgemeingültig, wenn sie in allen Modellen wahr ist

Notation

$$\models A$$

Beispiele

- $A \vee \neg A$
- $A \longrightarrow A$
- $(A \wedge (A \longrightarrow B)) \longrightarrow B$
- **1**

Deduktionstheorem

Deduktionstheorem

$$KB \models A \qquad \textbf{gdw.} \qquad KB \rightarrow A \quad \textbf{ist allgemeingültig}$$

(verbindet logische Folgerbarkeit und Allgemeingültigkeit)

Deduktionstheorem

Deduktionstheorem

$$KB \models A \qquad \textbf{gdw.} \qquad KB \rightarrow A \quad \textbf{ist allgemeingültig}$$

(verbindet logische Folgerbarkeit und Allgemeingültigkeit)

Folgerungen

- $M \cup \{A\} \models B$ **gdw.** $M \models A \rightarrow B$
- A, B **sind logisch äquivalent gdw.** $A \leftrightarrow B$ **ist allgemeingültig**

Erfüllbarkeit

Definition: Erfüllbarkeit

Eine Formel ist erfüllbar, wenn sie ein Modell hat

Erfüllbarkeit

Definition: Erfüllbarkeit

Eine Formel ist erfüllbar, wenn sie ein Modell hat

Beispiele

- $A \vee B$
- A
- $A \wedge (A \longrightarrow B)$

Unerfüllbarkeit

Definition: Unerfüllbarkeit

Eine Formel ist unerfüllbar, wenn sie in *keinem* Modell wahr ist, d.h., nicht erfüllbar ist

Unerfüllbarkeit

Definition: Unerfüllbarkeit

Eine Formel ist unerfüllbar, wenn sie in *keinem* Modell wahr ist, d.h., nicht erfüllbar ist

Beispiel

- $A \wedge \neg A$

Allgemeingültigkeit / Ableitbarkeit / Unerfüllbarkeit

Theorem

A **ist allgemeingültig** **gdw.** $\neg A$ **ist unerfüllbar**

(verbindet Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit)

Allgemeingültigkeit / Ableitbarkeit / Unerfüllbarkeit

Theorem

A **ist allgemeingültig** **gdw.** $\neg A$ **ist unerfüllbar**

(verbindet Allgemeingültigkeit und Unerfüllbarkeit)

Theorem

$KB \models A$ **gdw.** $(KB \land \neg A)$ **ist unerfüllbar**

(verbindet logische Ableitbarkeit und Unerfüllbarkeit)

Verbindung der Eigenschaften

Aus den Theoremen folgt

- **Logische Folgerbarkeit**
- **Allgemeingültigkeit**
- **Unerfüllbarkeit**

sind verbunden.

Kalkül für eine dieser Eigenschaften genügt

Das Craigsche Interpolationstheorem

Theorem

Seien A,B aussagenlogische Formeln mit

$$\models A \rightarrow B$$

dann gibt es eine Formel C mit

$$\models A \rightarrow C \quad \text{und} \quad \models C \rightarrow B,$$

so daß in C nur solche aussagenlogischen Atome $P \in \Sigma$ vorkommen, die sowohl in A als auch in B vorkommen.

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**
- **Semantik der Aussagenlogik:**
  Wahrheit einer Formel in einem Modell

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**
- **Semantik der Aussagenlogik:**
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- **Uniforme Notation**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**
- **Semantik der Aussagenlogik:**
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- **Uniforme Notation**
- **Wahrheitstafelmethode**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**
- **Semantik der Aussagenlogik:**
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- **Uniforme Notation**
- **Wahrheitstafelmethode**
- **Wichtige Äquivalenzen**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**
- **Semantik der Aussagenlogik:**
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- **Uniforme Notation**
- **Wahrheitstafelmethode**
- **Wichtige Äquivalenzen**
- **Äquivalenzumformung als Kalkül (Substitutionstheorem)**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- **Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln**
- **Induktion über Formelaufbau**
- **Semantik der Aussagenlogik:**
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- **Uniforme Notation**
- **Wahrheitstafelmethode**
- **Wichtige Äquivalenzen**
- **Äquivalenzumformung als Kalkül (Substitutionstheorem)**
- **Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unverfüllbarkeit**

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln
- Induktion über Formelaufbau
- Semantik der Aussagenlogik:
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- Uniforme Notation
- Wahrheitstafelmethode
- Wichtige Äquivalenzen
- Äquivalenzumformung als Kalkül (Substitutionstheorem)
- Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unverfüllbarkeit
- Deduktionstheorem,
  Verbindung von Allgemeingültigkeit und Underfüllbarkeit

Syntax und Semantik: Zusammenfassung

- Syntax der Aussagenlogik: Definition der Menge aller Formeln
- Induktion über Formelaufbau
- Semantik der Aussagenlogik:
  Wahrheit einer Formel in einem Modell
- Uniforme Notation
- Wahrheitstafelmethode
- Wichtige Äquivalenzen
- Äquivalenzumformung als Kalkül (Substitutionstheorem)
- Allgemeingültigkeit, Erfüllbarkeit, Unverfüllbarkeit
- Deduktionstheorem,
  Verbindung von Allgemeingültigkeit und Underfüllbarkeit
- Craigsches Interpolationstheorem