Vorlesung

Logik für Informatiker

2. Induktion

Bernhard Beckert

Universität Koblenz-Landau

Sommersemester 2006

Induktion

Zentrale Rolle

Wesentliches Beweisprinzip in Mathematik und Logik

Induktion

Zentrale Rolle

Wesentliches Beweisprinzip in Mathematik und Logik

Einfache Version

Induktion über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

(natural induction)

Induktion

Zentrale Rolle

Wesentliches Beweisprinzip in Mathematik und Logik

Einfache Version

Induktion über die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

(natural induction)

Verallgemeinerung

Noethersche Induktion über wohlfundierte Mengen

(structural induction)

Emmy Noether

Emmy Noether

- Geboren 1882 in Erlangen
- Gestorben 1934 in Princeton (USA)
- Mitbegründering der modernen Algebra

Emmy Noether

Emmy Noether

- Geboren 1882 in Erlangen
- Gestorben 1934 in Princeton (USA)
- Mitbegründering der modernen Algebra

Noethersch

Allgemein heißt eine algebraische Struktur noethersch,

wenn es in ihr keine unendlich absteigenden Ketten gibt.

Beispiel: Induktion über $\mathbb{N}$

Behauptung

Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2:

$$\sum_{i=1}^{n} = n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$

Partielle Ordnungen

Defintion: Partielle Ordnung

Eine Relation R über einer Menge A ist eine partielle Ordnung gdw.

- **R ist reflexiv**
- **R ist transitiv**
- **R ist antisymmetrisch, d.h.: wenn $R(x, y)$ und $R(y, x)$, dann $x = y$**

Partielle Ordnungen

Defintion: Partielle Ordnung

Eine Relation R über einer Menge A ist eine partielle Ordnung gdw.

- **R ist reflexiv**
- **R ist transitiv**
- **R ist antisymmetrisch, d.h.: wenn $R(x, y)$ und $R(y, x)$, dann $x = y$**

Dann heißt (A, R) eine partiell geordnete Menge

Totale Ordnungen

Definition: Totale Ordnung

Sei (A, R) eine partiell geordnete Menge

R ist eine totale Ordnung gdw.

$R(x, y)$ oder $R(y, x)$ für alle $x, y \in A$

Minimum

Definition: Minimum

Sei (A, R) eine partiell geordnete Menge

Sei $m \in A' \subseteq A$

m ist ein Minimum von A', gdw.:

es gibt *kein* $x \in A'$ mit $x \leq m$, $x \neq m$

Noethersche Menge

Sei $(A, \leq)$ eine partielle geordnete Menge

Definition

$x < y$ **gdw.** $x \leq y$ **und** $x \neq y$ **für** $x, y \in A$

Noethersche Menge

Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge

Definition

$x < y$ **gdw.** $x \leq y$ **und** $x \neq y$ **für** $x, y \in A$

Definition: Noethersch / wohlfundiert

$(A, \leq)$ heißt noethersch (oder wohlfundiert) gdw.:

Es gibt *keine* unendlich absteigende Kette, das heißt:

Es gibt *keine* unendliche Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq A$ mit $x_{i+1} < x_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$

Noethersche Menge

Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge

Definition

$x < y$ **gdw.** $x \leq y$ **und** $x \neq y$ **für** $x, y \in A$

Definition: Noethersch / wohlfundiert

$(A, \leq)$ **heißt noethersch (oder wohlfundiert) gdw.:**

Es gibt *keine* unendlich absteigende Kette, das heißt:

Es gibt *keine* unendliche Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq A$ **mit** $x_{i+1} < x_i$ **für alle** $i \in \mathbb{N}$

(Unendlich aufsteigende Ketten sind zulässig)

Noethersche Menge

Lemma

$(A, \leq)$ **ist noethersch gdw.:**

jede nicht-leere Teilmenge von A hat (mindestens) ein Minimum

Noethersche Menge

Lemma

$(A, \leq)$ ist noethersch gdw.:

jede nicht-leere Teilmenge von A hat (mindestens) ein Minimum

Nota bene

Es genügt nicht

- **dass A ein Minimum hat**
- **selbst dann nicht, wenn $\leq$ total ist**

Noethersche Menge

Lemma

$(A, \leq)$ ist noethersch gdw.:

jede nicht-leere Teilmenge von A hat (mindestens) ein Minimum

Nota bene

Es genügt nicht

- dass A ein Minimum hat
- selbst dann nicht, wenn $\leq$ total ist

Beispiel:

$$(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \leq)$$

Noethersche Induktion

Heißt auch: Strukturelle Induktion

Theorem

Sei $(A, \leq)$ noethersch (wohlfundiert)

Sei P ein Prädikat of A, d.h., eine Funktion

$$P : A \longrightarrow \{true, false\}$$

Wenn für alle $x \in A$:

$$P(y) \text{ für alle } y \in A \text{ mit } y < x \qquad \text{impliziert} \qquad P(x)$$

dann für alle $x \in A$:

$$P(x)$$

Fehlerquellen

Häufige Fehler bei Induktionsbeweisen

- Ordnung ist nicht noethersch
- Nicht alle Minima (Induktionsanfänge) bedacht
- Bei Induktionsschritt die Grenzfälle nicht bedacht

Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

Behauptung

Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

Behauptung

Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

Induktionsbehauptung

In einer Menge von n Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

Fehlerquellen

Was ist hier falsch?

Behauptung

Alle Menschen haben die gleiche Haarfarbe

Induktionsbehauptung

In einer Menge von n Menschen haben alle die gleiche Haarfarbe

Induktionsanfang $n = 1$

Für eine Menge mit nur einem Menschen gilt die Behauptung trivial

Fehlerquellen

Induktionsschritt $n \longrightarrow n + 1$

- $n + 1$ **Menschen werden in eine Reihe gestellt.**

Fehlerquellen

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$

- $n+1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.
- Der Mensch links außen wird rausgeschickt.

  Nun kann die Induktionsbehauptung angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem rechts außen).

Fehlerquellen

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$

- $n+1$ **Menschen werden in eine Reihe gestellt.**
- **Der Mensch links außen wird rausgeschickt.**

  Nun kann die Induktionsbehauptung angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem rechts außen).
- **Der Mensch rechts außen wird rausgeschickt.**

  Die Induktionsbehauptung kann angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem links außen).

Fehlerquellen

Induktionsschritt $n \longrightarrow n + 1$

- $n + 1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.
- Der Mensch links außen wird rausgeschickt.

  Nun kann die Induktionsbehauptung angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem rechts außen).
- Der Mensch rechts außen wird rausgeschickt.

  Die Induktionsbehauptung kann angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem links außen).
- Also haben die beiden außen die gleiche Haarfarbe, wie die in der Mitte, und die haben auch alle die gleiche Haarfarbe.

Fehlerquellen

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$

- $n+1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.
- Der Mensch links außen wird rausgeschickt.

  Nun kann die Induktionsbehauptung angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem rechts außen).
- Der Mensch rechts außen wird rausgeschickt.

  Die Induktionsbehauptung kann angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem links außen).
- Also haben die beiden außen die gleiche Haarfarbe, wie die in der Mitte, und die haben auch alle die gleiche Haarfarbe.

Fehlerquellen

Induktionsschritt $n \longrightarrow n+1$

- $n+1$ Menschen werden in eine Reihe gestellt.
- Der Mensch links außen wird rausgeschickt.

  Nun kann die Induktionsbehauptung angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem rechts außen).
- Der Mensch rechts außen wird rausgeschickt.

  Die Induktionsbehauptung kann angewendet werden und alle verbliebenen haben die gleiche Haarfarbe (mit dem links außen).
- Also haben die beiden außen die gleiche Haarfarbe, wie die in der Mitte, und die haben auch alle die gleiche Haarfarbe.

Also haben alle $n+1$ Menschen die gleiche Haarfarbe

Lexikographische Ordnung

Definition: Lexikographsische Ordnung

Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ partiell geordnete Mengen

Lexikographische Ordnung

Definition: Lexikographsische Ordnung

Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ partiell geordnete Mengen

Dann ist die lexikographische Ordnung $\ll$ auf $A \times B$ gegeben durch

$$(x, y) \ll (x', y')$$

gdw.

Lexikographische Ordnung

Definition: Lexikographsische Ordnung

Seien $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ partiell geordnete Mengen

Dann ist die lexikographische Ordnung $\ll$ auf $A \times B$ gegeben durch

$$(x, y) \ll (x', y')$$

gdw.

- $x = x'$ **und** $y = y'$ **oder**
- $x <_A x'$ **oder**
- $x = x'$ **und** $y <_B y'$

Lexikographische Ordnung

Lemma

Wenn $(A, \leq_A)$ und $(B, \leq_B)$ noethersch sind,

dann ist $(A \times B, \ll)$ noethersch.

Beispiel für Induktion: Ackermann-Funktion

Ackermann-Funktion

$$ACK(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{falls } x = 0 \\ ACK(x-1,1) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ ACK(x-1, ACK(x, y-1)) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \end{cases}$$

Beispiel für Induktion: Ackermann-Funktion

Ackermann-Funktion

$$ACK(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{falls } x = 0 \\ ACK(x-1,1) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y = 0 \\ ACK(x-1, ACK(x, y-1)) & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \end{cases}$$

Theorem

ACK ist eine totale Funktion auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Induktion: Zusammenfassung

- **Induktion über die natürlichen Zahlen**

Induktion: Zusammenfassung

- **Induktion über die natürlichen Zahlen**
- **Partielle Ordnung, totale Ordnung, Minimum**

Induktion: Zusammenfassung

- **Induktion über die natürlichen Zahlen**
- **Partielle Ordnung, totale Ordnung, Minimum**
- **Noethersche (wohlfundierte) Menge**

Induktion: Zusammenfassung

- **Induktion über die natürlichen Zahlen**
- **Partielle Ordnung, totale Ordnung, Minimum**
- **Noethersche (wohlfundierte) Menge**
- **Noethersche Induktion (Theorem, Beweis)**

Induktion: Zusammenfassung

- **Induktion über die natürlichen Zahlen**
- **Partielle Ordnung, totale Ordnung, Minimum**
- **Noethersche (wohlfundierte) Menge**
- **Noethersche Induktion (Theorem, Beweis)**
- **Fehlerquellen**

Induktion: Zusammenfassung

- Induktion über die natürlichen Zahlen
- Partielle Ordnung, totale Ordnung, Minimum
- Noethersche (wohlfundierte) Menge
- Noethersche Induktion (Theorem, Beweis)
- Fehlerquellen
- Lexikographische Ordnung

Induktion: Zusammenfassung

- **Induktion über die natürlichen Zahlen**
- **Partielle Ordnung, totale Ordnung, Minimum**
- **Noethersche (wohlfundierte) Menge**
- **Noethersche Induktion (Theorem, Beweis)**
- **Fehlerquellen**
- **Lexikographische Ordnung**
- **Beispiel für noethersche Induktion: Ackermann-Funktion**