Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. Vladimir Klebanov

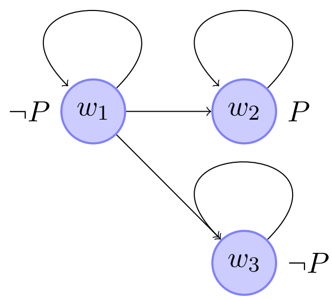
Formale Systeme, WS 2009/2010

Lösungen zum Übungsblatt 10

Dieses Blatt wurde in der Übung am 05.02.2010 besprochen.

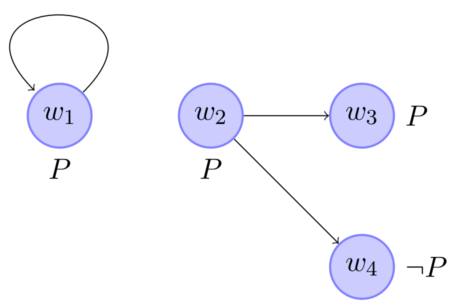
Zu Aufgabe 1

Sei $\mathcal{K}$ der folgende reflexive Kripkerahmen:



Es gilt $\mathcal{K} \models P \to \Box\Diamond P$ wegen $w_2 \models \Box\Diamond P$, da w_2 genau sich selbst als Nachfolger hat. Gleichzeitig $w_1 \not\models \Diamond P \to \Box\Diamond P$, da $w_1 \models \Diamond P$ (wegen $w_1 \to w_2$), aber $w_1 \not\models \Box\Diamond P$ wegen $w_3 \not\models \Diamond P$.

Zu Aufgabe 2



(a) Wir haben die Interpretation I in die Kripkestruktur oben eingezeichnet. Die Welten w_1, w_2 und w_3 interpretieren P als wahr, die Welt w_4 als falsch. Auch andere richtige Interpretationen sind natürlich denkbar.

Die Unterscheidungsformeln sind (eine Möglichkeit):

$$\phi_{1,2} = \Box P \qquad \phi_{1,3} = \Diamond P \qquad \phi_{1,4} = P$$
$$\phi_{2,3} = \Diamond P \qquad \phi_{2,4} = \Box P \qquad \phi_{3,4} = P$$

(b) Die Extensionen in diesem Modell sind:

$$[\![P]\!] = \{w_1, w_2, w_3\} \qquad [\![\neg P]\!] = \{w_4\}$$
$$[\![\Box P]\!] = \{w_1, w_3, w_4\} \qquad [\![\Diamond P]\!] = \{w_1, w_2\}$$
$$[\![\Diamond\Box P]\!] = \{w_1, w_2\} \qquad [\![\Box\Diamond P]\!] = \{w_1, w_3, w_4\}$$

Zu Aufgabe 3

Zur Erinnerung: Eine Äquivalenzrelation ist eine transitive, reflexive und symmetrische Relation.

1. $\Box A \to \Box\Box A$ ist allgemeingültig, da diese Formel die transitiven Kripkerahmen charakterisiert.

   Bleibt die Gegenrichtung $\Box\Box A \to \Box A$. Sie ist allgemeingültig, da sie die dichten Kripkerahmen charakterisiert und jede reflexive Relation dicht ist:

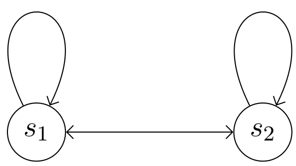
   R ist dicht, wenn es für alle x, y mit $R(x, y)$ ein z gibt mit $R(x, z)$ und $R(y, z)$. Wegen der Reflexivität erfüllt x die Rolle des z: $R(x, x)$ (refl.) und $R(x, y)$ (gegeben).

2. $\Box A \to \Diamond A$ ist allgemeingültig:

   Zu zeigen ist, dass für alle Zustände $s \in S$ gilt: Wenn in allen Zuständen mit $R(s, s')$ gilt, dass $s' \models A$, dann gibt es auch einen solchen Zustand s'' mit $R(s, s'')$ und $s'' \models A$. Wegen der Reflexivität gilt aber immer $R(s, s)$ und da A in allen Nachfolgezuständen gilt, muss es auch in s gelten, also gilt auch $s \models \Diamond A$.

   Oder: Diese Formel charakterisiert alle endlosen Kripkerahmen und alle Kripkerahmen, deren Zugänglichkeitsrelation eine Äquivalenzrelation ist, sind endlos.

3. $\Box\Diamond A \to \Diamond\Box A$ ist nicht allgemeingültig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

   Es gelte: $I(A, s_1) = W$ und $I(A, s_2) = F$.
   Damit gilt : $val_{s_1}(\Box\Diamond A) = W$ und $val_{s_1}(\Diamond\Box A) = F$

4. $\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$ ist allgemeingültig.

   - $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ ist allgemeingültig: Falls $s \models \Diamond A$ für ein $s \in S$, dann $t \models$ A für ein t mit $R(s, t)$. Zu zeigen ist, dass $s \models \Box\Diamond A$, d.h., für beliebiges u mit $R(s, u)$ gilt $u \models \Diamond A$. Aus der Symmetrie folgt $R(u, s)$ und damit und der Transitivität folgt $R(u, t)$, d.h., $u \models \Diamond A$.
   - $\Box\Diamond A \to \Diamond A$ ist allgemeingültig, denn aus der Reflexivität folgt aus $s \models \Box\Diamond A$ für jeden Zustand $s \in S$ auch $s \models \Diamond A$.

Zu Aufgabe 4

1. $\texttt{x} \doteq 0 \to \langle\texttt{x++;}\rangle\texttt{x} \doteq 1$ – allgemeingültig

2. $[\texttt{while (true);}]$*false* – allgemeingültig: *false* (oder **0**) gilt zwar in keiner Welt, aber ein nichtterminierendes Programm hat keine Nachfolgezustände. Insofern gilt *false* dann doch in allen Nachfolgewelten.

3. $\langle\texttt{while (true);}\rangle$*true* – unerfüllbar, selber Grund: es gibt keine Nachfolgewelt.

4. $\texttt{x} > \texttt{y} \to \langle\texttt{x++; y++;}\rangle\texttt{x} > \texttt{y}$ – erfüllbar aber nicht allgemeingültig wegen Integerüberlauf in Java.

5. $\langle p\rangle\phi \to [p]\phi$ für ein beliebiges Java Card-Programm p und eine beliebige Formel ϕ – allgemeingültig, allerdings nur weil Java Card deterministisch ist: es gibt nie mehr als eine Nachfolgewelt bzgl. eines beliebigen Programms. Für nichtdeterministische Programmiersprachen (durch Concurrency o.ä.) gilt diese Aussage nicht ohne weiteres.