Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
Dr. des. Vladimir Klebanov

Formale Systeme, WS 2009/2010

Übungsblatt 5

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am 11.12.2009 besprochen.

Konvention: Im folgenden seien r, s, u, v, w, x, y, z Variablen, p und q Prädikate, f, g, h und a, b, c, d Funktionen bzw. Konstanten.

Aufgabe 1

(a) Betrachten Sie jeweils die folgenden Substitutionen σ und Formeln F. Falls σ für F kollisionsfrei ist, geben Sie $\sigma(F)$ an; andernfalls geben Sie an, wo eine Kollision auftritt.

(i)	$\sigma = \{x/c,\ y/f(c, g(x))\}$	$F = \forall x(p(g(x), f(x, y)) \lor q(x))$
(ii)	$\sigma = \{x/f(g(x), c)\}$	$F = \exists y(p(x, y) \lor \exists z \forall x(f(z, c) \doteq f(c, x)))$
(iii)	$\sigma = \{y/g(x),\ z/g(y)\}$	$F = p(x, y) \to \forall x(q(f(x, z)) \lor \exists y(q(f(x, y))))$

(b) Betrachten Sie jeweils die folgenden Formeln F und G. Geben Sie einen allgemeinsten Unifikator μ sowie das Ergebnis $\mu(F) = \mu(G)$ der Unifikation an, falls sie unifizierbar sind.

(i)	$F = q(f(f(x, y), x))$	$G = q(f(f(g(c), z), g(z)))$
(ii)	$F = p(x, y)$	$G = p(f(y), f(x))$
(iii)	$F = p(x, f(y, x))$	$G = p(f(y, c), f(g(z), f(g(z), c)))$

Aufgabe 2

Berechnen Sie für die Substitutionen θ, σ jeweils die Komposition $\sigma \circ \theta$.

(a) $\theta = \{x/a, y/x\}$, $\sigma = \{v/f(u), u/z\}$

(b) $\theta = \{v/h(x, y), w/b, s/y\}$, $\sigma = \{x/d, y/d, r/f(v)\}$

(c) $\theta = \{u/g(y, x), v/y, w/y\}$, $\sigma = \{u/d, x/b, y/f(v)\}$

(d) $\theta = \{x/y, y/v\}$, $\sigma = \{x/a, y/b, v/u\}$

Aufgabe 3

Eine Substitution θ ist allgemeiner als eine Substitution σ, geschrieben $\theta \geqslant \sigma$, wenn es eine Substitution τ gibt, so daß $\tau \circ \theta = \sigma$.

(a) Es seien die folgenden Substitutionen gegeben:

$$\mu_1 = \{x/y, r/y, u/y, v/f(z)\}$$
$$\mu_2 = \{r/x, y/x, u/x, v/f(x), z/x\}$$
$$\mu_3 = \{x/a, y/a, z/b, u/a, v/f(b), r/a\}$$

Prüfen Sie für jedes mögliche Paar (μ_i, μ_j), ob $\mu_i \geqslant \mu_j$, und geben Sie ggf. die entsprechende Substitution τ an.

(b) Zeigen Sie folgende Eigenschaften von $\geqslant$:

   (i) Reflexivität: $\theta \geqslant \theta$ für alle θ.

   (ii) Transitivität: Falls $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \mu$, dann auch $\theta \geqslant \mu$ für alle θ, σ, μ.

   (iii) Keine Antisymmetrie: Aus $\theta \geqslant \sigma$ und $\sigma \geqslant \theta$ folgt nicht $\theta = \sigma$ für alle θ, σ.

   Sie dürfen dabei die Assoziativität der Substitutionskomposition $\circ$ benutzen.