2. Zwischentest Formale Systeme

Fakultät für Informatik

WS 2009/2010

Prof. Dr. Bernhard Beckert

28. Januar 2010

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Bitte geben Sie auf jedem benutzten Blatt rechts oben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer an!

Die Bearbeitungszeit beträgt 30 Minuten.

A1 (10)	A2 (5)	A3 (6)	A4 (6)	A5 (3)	Σ (30)

Bewertungstabelle bitte frei lassen!

Gesamtpunkte:

1 Zur Einstimmung (4+6 Punkte)

a. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	keine Formel der PL1	erfüllbar (aber nicht allgemeing.)	allgemeingültig (und erfüllbar)	unerfüllbar
$\forall x\, (r(c,x) \leftrightarrow \neg r(x,x))$				X
$\forall x\, (p(x) \land q(x)) \leftrightarrow (\forall x\, p(x) \land \forall x\, q(x))$			X	
$\big(\exists x\, p(x)\big) \leftrightarrow p(c)$		X		
$\forall x \forall y\, (x \leftrightarrow y)$	X			

Die Symbole p, q, r sind Prädikatensymbole, c ist ein Konstantensymbol, die übrigen Bezeichner sind Variablen.

b. Bitte kreuzen Sie in der folgenden Tabelle das Zutreffende an. Für korrekte Antworten erhalten Sie einen Punkt, für falsche Antworten wird ein Punkt abgezogen. Dabei werden jedoch nie weniger als 0 Punkte für diese Teilaufgabe vergeben.

	Richtig	Falsch
Jede erfüllbare modallogische Formel hat ein Modell mit nur endlich vielen Welten.	X	
Aus dem Kompaktheitssatz folgt: In Prädikatenlogik erster Stufe kann man nicht formalisieren, dass eine Relation p die transitive Hülle einer Relation q ist.	X	
In noetherschen Reduktionssystemen hat jedes Element immer eine eindeutige Normalform.		X
Die Menge der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik zweiter Stufe ist aufzählbar.		X
Sei C eine Klauselmenge und σ eine Substitution. Wenn $C\sigma$ unerfüllbar ist, dann ist auch C unerfüllbar.	X	
Sei C eine Klauselmenge und σ eine Substitution. Wenn C unerfüllbar ist, dann ist auch $C\sigma$ unerfüllbar.		X

2 Formalisieren in Prädikatenlogik (5 Punkte)

Formalisieren Sie folgende Aussagen aus dem Leben Informatik-Studierender in Prädikatenlogik erster Stufe. Benutzen Sie dabei jeweils die angegebenen Prädikatsymbole
(m ist zweistellig, alle anderen Prädikate sind einstellig).

1. Jeder, der die Klausur besteht, ist genial oder lernt.
   Prädikate: $b(\cdot)$, $g(\cdot)$, $l(\cdot)$

   $$\boxed{\forall x \left(b(x) \to (g(x) \lor l(x))\right)}$$

2. Jeder, der Informatiker ist, hat einen Mitbewohner.
   Prädikate: $i(\cdot)$, $m(\cdot,\cdot)$

   $$\boxed{\forall x \left(i(x) \to \exists y\, m(y,x)\right)\ ^1}$$

3. Jeder, der einen feierlustigen Mitbewohner hat, geht zum Unifest.
   Prädikate: $f(\cdot)$, $m(\cdot,\cdot)$, $u(\cdot)$

   $$\boxed{\forall x \left(\exists y\, (m(y,x) \land f(y)) \to u(x)\right)}$$

4. Wer zum Unifest geht, lernt nicht.
   Prädikate: $u(\cdot)$, $l(\cdot)$

   $$\boxed{\forall x \left(u(x) \to \neg l(x)\right)}$$

5. Falls jeder Informatiker nur feierlustige Mitbewohner hat, dann ist jeder Informatiker, der die Klausur besteht, genial.
   Prädikate: $i(\cdot)$, $f(\cdot)$, $m(\cdot,\cdot)$, $b(\cdot)$, $g(\cdot)$

   $$\boxed{\Big(\forall x \left(i(x)^2 \to \forall y\, (m(y,x) \to f(y))\right)\Big) \to \Big(\forall x\, ((i(x) \land b(x)) \to g(x))\Big)}$$

[1] Da „ist Mitbewohner von“ eine symmetrische Relation ist, kann man $m(y,x)$ oder $m(x,y)$ verwenden.
[2] Korrigierte Version: In einer früheren Fassung wurde diese Teilformel irrtümlich weggelassen.

3 Resolution (6 Punkte)

Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Signatur: p, q und r sind einstellige Prädikatensymbole, f eine einstellige Funktion, c eine Konstante. x ist nachstehend eine Variable.

Gegeben seien nun folgende Klauseln über dieser Signatur:

1. $\{p(x), p(c), r(x)\}$
2. $\{p(x), q(x)\}$
3. $\{\neg p(c), \neg q(c)\}$
4. $\{\neg p(f(x))\}$

Geben Sie alle Klauseln an, die sich daraus in **einem** Resolutionsschritt ableiten lassen. Tragen Sie diese in die folgende Tabelle ein.

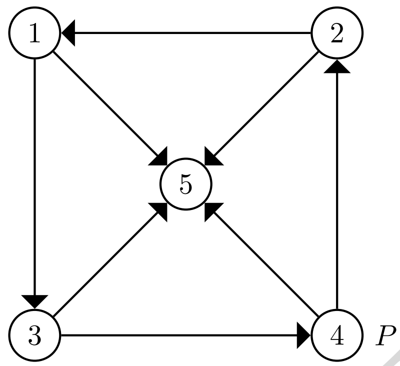
Wenn ein Paar von Klauseln keine Resolvente hat, markieren Sie dies in der Tablelle durch ein Kreuz (und nicht dadurch, dass Sie das Feld frei lassen).

	$\{p(x), p(c), r(x)\}$	$\{p(x), q(x)\}$	$\{\neg p(c), \neg q(c)\}$	$\{\neg p(f(x))\}$
$\{p(x), p(c), r(x)\}$	X	X	$\{p(x), r(x), \neg q(c)\}$ $\{r(c), \neg q(c)\}$	$\{p(c), r(f(x))\}$
$\{p(x), q(x)\}$	X	X	$\{q(c), \neg q(c)\}$ $\{p(c), \neg p(c)\}$	$\{q(f(x))\}$
$\{\neg p(c), \neg q(c)\}$	$\{p(x), r(x), \neg q(c)\}$ $\{r(c), \neg q(c)\}$	$\{q(c), \neg q(c)\}$ $\{p(c), \neg p(c)\}$	X	X
$\{\neg p(f(x))\}$	$\{p(c), r(f(x))\}$	$\{q(f(x))\}$	X	X

Bitte beachten: Der Inhalt der grauen Felder ist aufgeführt zu Ihrer Information. Es war nicht Teil der Aufgabe, diese auszufüllen.

4 Modallogik (4+2 Punkte)

Sei $\mathcal{K}$ die folgende Kripke-Struktur. Die atomare Aussage P ist dabei (wie eingezeichnet) nur in der Welt 4 wahr und in den anderen Welten falsch.



a. Bestimmen Sie für jede der folgenden Formeln, in welchen Welten von $\mathcal{K}$ sie gilt:

i. $\Box P$ gilt in: $\boxed{5}$

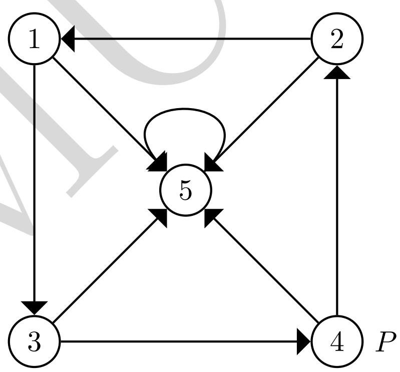
ii. $\Diamond(P \to \Box \mathbf{0})$ gilt in: $\boxed{1,2,3,4}$

iii. $\Box\Diamond\mathbf{1}$ gilt in: $\boxed{5}$

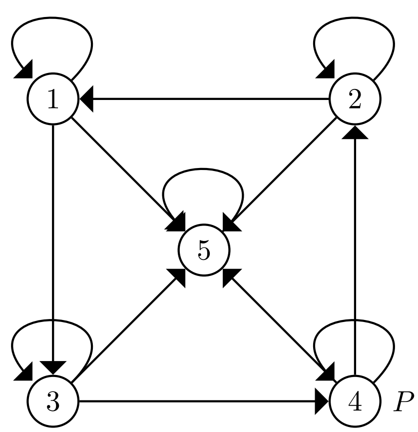
b. Fügen Sie <u>nicht mehr als fünf</u> Übergänge zu $\mathcal{K}$ hinzu, so daß die Formel

$$\Box P \to P$$

in jeder Welt gilt. Zeichnen Sie die neuen Kanten in das obige Diagramm ein.



Die minimale Lösung verbindet die Welt 5 mit einer der Welten, in denen P falsch ist (1,2,3 oder 5). Hier die letztere Variante.



Alternativ: $\Box P \to P$ charakterisiert die reflexiven Kripkerahmen.

5 Tableaukalkül (3 Punkte)

Vervollständigen Sie das folgende Tableau, bis es geschlossen ist. Notieren Sie dabei:

- bei jeder Erweiterung, durch welche Regelanwendung eine Formel auf dem Tableau entstanden ist,
- bei Abschlüssen die beiden Partner,
- die schließende Substitution.

$$1\,\forall x.p(x)\ {}_{1}$$

$$0\,(p(c) \land \forall x.p(f(x)))\ {}_{2}$$

$$1\,p(X)\ {}_{3[\gamma(1)]}$$

- $0\,p(c)\ {}_{4[\beta(2)]}$
  - $\boxed{\star_{[3,4]}}$
- $0\,\forall x.p(f(x))\ {}_{5[\beta(2)]}$
  - $\boxed{0\,p(f(d))\ {}_{6[\delta(5)]}}$
  - $\boxed{1\,p(X')\ {}_{7[\gamma(1)]}}$
  - $\boxed{\star_{[6,7]}}$

$\boxed{\text{Die schließende Substitution ist } \{X/c, X'/f(d)\}.}$