

Formale Systeme

Endliche Automaten

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Endliche Automaten

Wiederholung

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Deterministische endliche Automaten

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Definition

Ein endlicher Automat ist gegeben durch

- eine endliche Menge S von Zuständen
- ein Alphabet VT (terminale Zeichen)
- einer Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$
- eine nichtleere Teilmenge $S_1 \subseteq S$ als Menge von Endzuständen

Die Übergangsfunktion $\delta : S \times VT \rightarrow S$ wird fortgesetzt zu $\delta : S \times VT^* \rightarrow S$:

$$\delta(s, \varepsilon) = s$$

$$\delta(s, aw_1) = \delta(s', w_1) \text{ wobei } \delta(s, a) = s'$$

Definition von $L(EA)$

Jeder endliche Automat EA akzeptiert eine Menge von Wörtern $L(EA)$.

$$L(EA) = \{w \in VT^* \mid \delta(s_0, w) \in S_1\}$$

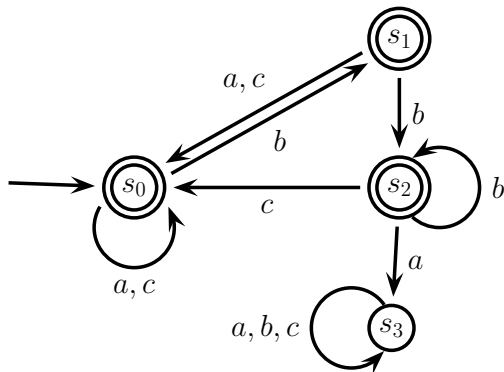
Variante

Gelegentlich wird in Beispielen die Übergangsfunktion δ nicht für alle Paare (s, a) definiert.

Wird während der Abarbeitung eines Wortes w eine Situation (s, a) erreicht, für die $\delta(s, a)$ nicht definiert ist, so gilt w als nicht akzeptiert.

Ein endlicher Automat, so daß $\delta(s, a)$ für alle $s \in S$ und $a \in VT$ definiert ist, heißt ein **vollständiger endlicher Automat**.

Der Beispielautomat N_{bba}



$$V = \{a, b, c\}$$

$$S_1 = \{s_0, s_1, s_2\}$$

$$L(N_{bba}) = \{w \in V^* \mid$$

bba ist kein
Teilwort
von $w\}$

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,

Die Änderung gegenüber den deterministischen endlichen Automaten besteht also darin, daß die Übergangsfunktion δ als Werte Mengen von Zuständen annimmt:

Nichtdeterministisch akzeptierte Sprachen

Die Fortsetzung von $\delta : S \times V \rightarrow Pot(S)$ zu $\delta : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$ wird jetzt wie folgt definiert:

$$\delta(s, \varepsilon) = \{s\}$$

$$\delta(s, aw_1) = \{s' \mid \text{es gibt } s_1 \in S \text{ mit } s_1 \in \delta(s, a) \text{ und } s' \in \delta(s_1, w_1)\}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* akzeptierte Sprache $L(NEA)$ wird jetzt durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* \mid \delta(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Definition

Ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen wird durch die folgenden Bestimmungsstücke gegeben:

- eine endliche Menge S von Zuständen,
- ein Alphabet V ,
- ein Anfangszustand $s_0 \in S$,
- eine Menge $F \subseteq S$ von Finalzuständen,
- eine Übergangsfunktion $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-cl} : \text{Pot}(S) \rightarrow \text{Pot}(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

$\varepsilon\text{-cl}$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

- 1 $I \subseteq J$
- 2 für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Die Bezeichnung $\varepsilon\text{-cl}$ soll an $\varepsilon\text{-closure}$ erinnern.

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-cl} : \text{Pot}(S) \rightarrow \text{Pot}(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

$\varepsilon\text{-cl}$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

- 1 $I \subseteq J$
- 2 für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Die Bezeichnung $\varepsilon\text{-cl}$ soll an $\varepsilon\text{-closure}$ erinnern.

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-cl} : \text{Pot}(S) \rightarrow \text{Pot}(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

$\varepsilon\text{-cl}$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

- 1 $I \subseteq J$
- 2 für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Die Bezeichnung $\varepsilon\text{-cl}$ soll an $\varepsilon\text{-closure}$ erinnern.

Sei $A = (S, V, s_0, \delta, F)$ ein endlicher Automat mit spontanen Übergängen, dann ist die Funktion

$$\varepsilon\text{-cl} : \text{Pot}(S) \rightarrow \text{Pot}(S)$$

für $I \subseteq S$ definiert als:

$\varepsilon\text{-cl}$ ist die kleinste Teilmenge $J \subseteq S$ mit

- 1 $I \subseteq J$
- 2 für alle $s \in J$ gilt $\delta(s, \varepsilon) \subseteq J$.

Die Bezeichnung $\varepsilon\text{-cl}$ soll an $\varepsilon\text{-closure}$ erinnern.

Die Fortsetzung von $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$ zu $\bar{\delta} : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$ kann jetzt definiert werden als:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(s, \varepsilon) &= \varepsilon\text{-cl}(\{s\}) \\ \bar{\delta}(s, aw_1) &= \varepsilon\text{-cl}(\{s' \mid \text{es gibt } s_1 \in (\delta(s, a) \cup \delta(s, \varepsilon)), \\ &\quad \text{so da\ss } s' \in \bar{\delta}(s_1, w_1)\})\end{aligned}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* mit spontanen Übergängen akzeptierte Sprache $L(NEA)$ wird wieder durch

$$L(NEA) = \{w \in V^* \mid \bar{\delta}(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Die Fortsetzung von $\delta : S \times (V \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow Pot(S)$ zu $\bar{\delta} : S \times V^* \rightarrow Pot(S)$ kann jetzt definiert werden als:

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(s, \varepsilon) &= \varepsilon\text{-cl}(\{s\}) \\ \bar{\delta}(s, aw_1) &= \varepsilon\text{-cl}(\{s' \mid \text{es gibt } s_1 \in (\delta(s, a) \cup \delta(s, \varepsilon)), \\ &\quad \text{so da\ss } s' \in \bar{\delta}(s_1, w_1)\})\end{aligned}$$

Die von einem nichtdeterministischen endlichen Automaten *NEA* mit spontanen Übergängen akzeptierte Sprache $L(\text{NEA})$ wird wieder durch

$$L(\text{NEA}) = \{w \in V^* \mid \bar{\delta}(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

definiert.

Satz

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Dabei kann A spontane Übergänge enthalten und muß auch nicht vollständig sein.

Satz

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten

$$A = (S, V, s_0, \delta, F)$$

gibt es einen deterministischen endlichen Automaten

$$B = (Q, V, q_0, \Delta, G)$$

mit

$$L(A) = L(B)$$

Dabei kann A spontane Übergänge enthalten und muß auch nicht vollständig sein.

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

1 $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,

2 $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$

3 $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung

4 $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt

5 $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

① $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,

② $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$

③ $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung

④ $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt

⑤ $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

- 1 $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
- 2 $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
- 3 $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
- 4 $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt
- 5 $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

- 1 $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
- 2 $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
- 3 $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
- 4 $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt
- 5 $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Liste der Operationen

Seien $L, L_1, L_2 \subseteq V^*$.

- 1 $L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$,
- 2 $L^* = \{w_1 \dots w_n \mid n \geq 0, w_i \in L\}$
- 3 $L_1 \cup L_2 =$ Mengenvereinigung
- 4 $L_1 \cap L_2 =$ Mengendurchschnitt
- 5 $L_1 \setminus L_2 =$ Mengendifferenz

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

- 1 $\emptyset \in Reg_V$,
- 2 $\varepsilon \in Reg_V$,
- 3 für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
- 4 für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
- 5 für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

- 1 $\emptyset \in Reg_V$,
- 2 $\varepsilon \in Reg_V$,
- 3 für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
- 4 für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
- 5 für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

- 1 $\emptyset \in Reg_V$,
- 2 $\varepsilon \in Reg_V$,
- 3 für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
- 4 für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
- 5 für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

- 1 $\emptyset \in Reg_V$,
- 2 $\varepsilon \in Reg_V$,
- 3 für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
- 4 für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
- 5 für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Reg_V = Menge der regulären Ausdrücke über V

- 1 $\emptyset \in Reg_V$,
- 2 $\varepsilon \in Reg_V$,
- 3 für jedes $a \in V$ ist $a \in Reg_V$,
- 4 für $t \in Reg_V$ gilt auch $(t)^* \in Reg_V$,
- 5 für $t_1, t_2 \in Reg_V$ gilt auch $(t_1 t_2) \in Reg_V$ und $(t_1 + t_2) \in Reg_V$.

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

- 1 $S(\emptyset) = \emptyset,$
- 2 $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\},$
- 3 $S(a) = \{a\},$
- 4 $S((t)^*) = (S(t))^*,$
- 5 $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2).$

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

- 1 $S(\emptyset) = \emptyset,$
- 2 $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\},$
- 3 $S(a) = \{a\},$
- 4 $S((t)^*) = (S(t))^*,$
- 5 $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2).$

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

- 1 $S(\emptyset) = \emptyset,$
- 2 $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\},$
- 3 $S(a) = \{a\},$
- 4 $S((t)^*) = (S(t))^*,$
- 5 $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2).$

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

- 1 $S(\emptyset) = \emptyset,$
- 2 $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\},$
- 3 $S(a) = \{a\},$
- 4 $S((t)^*) = (S(t))^*,$
- 5 $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2).$

Durch die folgende Vorschrift wird jedem regulären Ausdruck t über V eine Menge $S(t)$ von Wörtern in V^* zugeordnet.

- 1 $S(\emptyset) = \emptyset,$
- 2 $S(\varepsilon) = \{\varepsilon\},$
- 3 $S(a) = \{a\},$
- 4 $S((t)^*) = (S(t))^*,$
- 5 $S((t_1 t_2)) = S(t_1)S(t_2)$ und $S((t_1 + t_2)) = S(t_1) \cup S(t_2).$

Satz

Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit

$$S(t) = L(A).$$

Wir benutzen im folgenden stillschweigend die Assoziativität der Konkatenation und von $+$ um in regulären Ausdrücken Klammern einzusparen, also $(a + b + c)$ anstelle von $((a + b) + c)$.

Satz

Zu jedem endlichen Automaten A gibt es einen regulären Ausdruck t mit

$$S(t) = L(A).$$

Wir benutzen im folgenden stillschweigend die Assoziativität der Konkatenation und von $+$ um in regulären Ausdrücken Klammern einzusparen, also $(a + b + c)$ anstelle von $((a + b) + c)$.