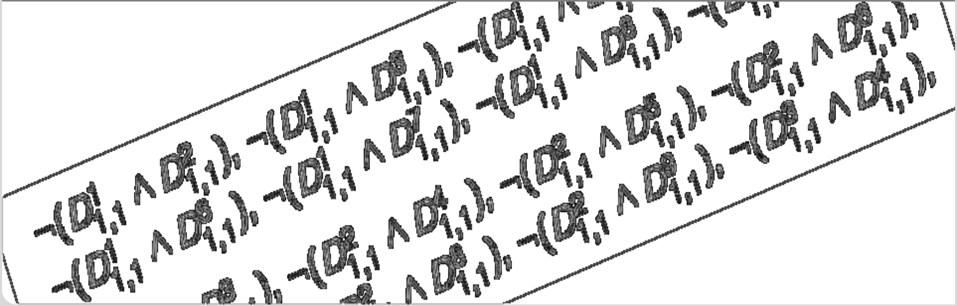
Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Prädikatenlogik 2. Stufe

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
Variable:

$Var =$	$Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)
$Ivar$:	*Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$
	Notation: $x, y, z, \ldots$
$Mvar$:	*Mengenvariable* oder
	einstellige Prädikatvariable $M_0, M_1, \ldots$
	Notation: $X, Y, Z, \ldots$

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1
Terme $Term_\Sigma$ wie in PL1

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
Variable:

$Var =$	$Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)
$Ivar$:	*Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$
	Notation: $x, y, z, \ldots$
$Mvar$:	*Mengenvariable* oder
	einstellige Prädikatvariable $M_0, M_1, \ldots$
	Notation: $X, Y, Z, \ldots$

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1

Terme $Term_\Sigma$ wie in PL1

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe

Logische Zeichen:

Wie in der PL1: $(,), \doteq, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.
Variable:

$Var =$	$Ivar \cup Mvar$ (disjunkt)
$Ivar$:	*Individuenvariable* $v_0, v_1, \ldots$
	Notation: $x, y, z, \ldots$
$Mvar$:	*Mengenvariable* oder
	einstellige Prädikatvariable $M_0, M_1, \ldots$
	Notation: $X, Y, Z, \ldots$

Signatur $\Sigma = (F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma)$ wie in PL1
Terme $Term_\Sigma$ wie in PL1

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1**, **0**
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall xA$, $\exists xA$, $\forall XA$, $\exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1**, **0**
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall x A$, $\exists x A$, $\forall X A$, $\exists X A$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1**, **0**
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall xA$, $\exists xA, \forall XA, \exists XA$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Syntax der Prädikatenlogik 2. Stufe (Forts.)

atomare Formeln:

$s \doteq t$ für Terme s, t
$p(t_1, \ldots, t_n)$ für $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$, $t_i \in \mathrm{Term}_\Sigma$
$X(t)$ für Mengenvariable X und Terme t

Formeln For^2_Σ enthält genau

- alle atomaren Formeln
- **1**, **0**
- mit $A, B \in For^2_\Sigma, x \in Ivar, X \in Mvar$
  auch: $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$,
  $\forall x A$, $\exists x A$, $\forall X A$, $\exists X A$

Die Begriffe „freie Variable“, „gebundene Variable“, „Substitution“, „kollisionsfreie Substitution“, „Präfix“, „Allabschluß“, „Existenzabschluß“ u.ä. werden entsprechend

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$
\begin{aligned}
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W &\Leftrightarrow val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W &\Leftrightarrow \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W
\end{aligned}
$$

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$
\begin{array}{lcl}
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W & \Leftrightarrow & val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W & \Leftrightarrow & \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W & \Leftrightarrow & \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W
\end{array}
$$

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad \mathit{Ivar} \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad \mathit{Mvar} \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$\begin{aligned}
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W \quad &\Leftrightarrow \quad val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W \quad &\Leftrightarrow \quad \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W \quad &\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W
\end{aligned}$$

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \rightarrow D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \rightarrow P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$
\begin{array}{lcl}
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W & \Leftrightarrow & val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W & \Leftrightarrow & \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W & \Leftrightarrow & \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W
\end{array}
$$

Semantik der Prädikatenlogik 2. Stufe

Zu einer Interpretation $\mathcal{D} = (D, I)$ sind Belegungen

$$\beta : \quad Ivar \to D \quad \text{und} \quad \gamma : \quad Mvar \to P(D)$$

zu betrachten ($P(D)$: Potenzmenge von D).

Auswertung von Formeln:

$$\begin{array}{lcl}
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(X(t)) = W & \Leftrightarrow & val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(t) \in \gamma(X) \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\forall X A) = W & \Leftrightarrow & \text{für jedes } M \subseteq D \text{ gilt } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W \\
val_{\mathcal{D},\beta,\gamma}(\exists X A) = W & \Leftrightarrow & \text{es gibt ein } M \subseteq D \text{ mit } val_{\mathcal{D},\beta,\gamma_X^M}(A) = W
\end{array}$$

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M :$\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A$:$\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* :$\Leftrightarrow$ $\models A$

A *erfüllbar* :$\Leftrightarrow$ $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M :$\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A$:$\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* :$\Leftrightarrow$ $\models A$

A *erfüllbar* :$\Leftrightarrow$ $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M :$\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A$:$\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A allgemeingültig :$\Leftrightarrow$ $\models A$

A erfüllbar :$\Leftrightarrow$ $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M :$\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A$:$\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* :$\Leftrightarrow$ $\models A$

A *erfüllbar* :$\Leftrightarrow$ $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Modellbegriff

(D, I) heißt *Modell* von A : $\Leftrightarrow$ $val_{D,I,\beta,\gamma}(A) = W$ für alle β, γ.

(D, I) ist Modell einer Formelmenge M :$\Leftrightarrow$
(D, I) ist Modell jeder Formel in M.

$M \models A$:$\Leftrightarrow$ Jedes Modell von M ist Modell von A

A *allgemeingültig* :$\Leftrightarrow$ $\models A$

A *erfüllbar* :$\Leftrightarrow$ $\neg A$ ist nicht allgemeingültig.

Beispiele für PL2 Formeln

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
  Charakterisiert die Gleichheit $x \doteq y$.
- $\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$
  Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.

Beispiele für PL2 Formeln

- $\forall X(X(x) \leftrightarrow X(y))$
  Charakterisiert die Gleichheit $x \doteq y$.
- $\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall y X(y))$
  Das Induktionsschema der Peanoschen Axiome als Formel.

Kompaktheit

Theorem

Die PL2 ist nicht kompakt. D. h.:

- *Es gibt eine Formelmenge S, so daß jede endliche Teilmenge von S ein Modell hat S selbst aber nicht.*

Kompaktheit

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{\forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall y X(y))\} \cup \{\neg(c \doteq \underbrace{s(\ldots s(}_{n \text{ mal}} 0) \ldots) \mid n \geq 0\}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \wedge \forall y(X(y) \rightarrow X(s(y)))) \rightarrow \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge aber nicht mehr.

Kompaktheit

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$S = \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \cup \{\neg(c \doteq \underbrace{s(\dots s(}_{n \text{ mal}} 0)\dots) \mid n \geq 0\}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge aber nicht mehr.

Kompaktheit

Beweis

Vokabular $\Sigma = \{s, 0, c\}$

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{\forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))\} \cup \\ & & \{\neg(c \doteq \underbrace{s(\ldots s(}_{n \text{ mal}} 0) \ldots) \mid n \geq 0\} \end{array}$$

Aus $(D, I) = \mathcal{D} \models \forall X((X(0) \land \forall y(X(y) \to X(s(y)))) \to \forall y X(y))$ folgt $D = \{s^n(0) \mid n \geq 0\}$.

Jede endliche Teilmenge der Ungleichungen $\{c \neq s^n(0) \mid n \geq 0\}$ lässt sich noch erfüllen, die ganze Menge aber nicht mehr.

Axiomatisierbarkeit

Theorem

Für die Prädikatenlogik 2. Stufe kann es keinen korrekten und vollständigen Kalkül geben.

Beweis

Der Begriff der Ableitbarkeit aus einem Kalkül K ist stets kompakt, d. h.:
Aus

$$S \vdash_K A$$

folgt stets

$$E \vdash_K A$$

für eine endliche Teilmenge $E \subseteq S$.
Die Existenz eines korrekten und vollständigen Kalküls stünde also im Widerspruch zu dem Gegenbeispiel zur Kompaktheit von PL2.

Endlichkeit

Mit Quantoren über 2-stellige Relationen kann man auch die Endlichkeit des Grundbereichs durch eine Formel ohne nicht-logische Zeichen ausdrücken.

$$
\begin{array}{ll}
Fin & := \\
\forall U & ((\forall x \exists y U(x,y) \wedge \\
& \forall x \forall y \forall z (U(x,y) \wedge U(x,z) \rightarrow y \doteq z) \\
& \wedge \forall x \forall y \forall z (U(x,z) \wedge U(y,z) \rightarrow x \doteq y)) \\
& \rightarrow \forall y \exists x U(x,y))
\end{array}
$$

$$(D, I) \models Fin \Leftrightarrow D \text{ ist endlich}$$

Endlichkeit

Beweisidee

(D, I) endlich

$\Leftrightarrow$ Jede injektive Funktion $F : D \to D$ ist auch surjektiv

$\Leftrightarrow$ Für jede Relation $R \subseteq D \times D$ gilt:
Wenn R der Graph einer injektiven Funktion ist,
dann ist diese auch surjektiv.