

# Formale Systeme

## Aussagenlogik: Resolutionskalkül

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK



## Merkmale des Resolutionkalküls

- Widerlegungskalkül
- Voraussetzung:  
Alle Formeln sind in konjunktiver Normalform.
- Es gibt eine einzige Regel: die Resolutionsregel  
eine Modifikation des Modus ponens.
- Es sind keine logischen Axiome mehr notwendig;  
insbesondere entfällt die Suche nach („langen“) passenden  
Instantiierungen der Axiomenschemata  $Ax1$ ,  $Ax2$ ,  $Ax3$ .

Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen.

$\square$  ist die *leere Klausel*.

Eine Klausel

$$\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}$$

lesen wir als die Disjunktion der ihr angehörenden Literalen:

$$P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee \neg P_2$$

Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen.

$\square$  ist die *leere Klausel*.

Eine Klausel

$$\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}$$

lesen wir als die Disjunktion der ihr angehörenden Literalen:

$$P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee \neg P_2$$

Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen.

$\square$  ist die *leere Klausel*.

Eine Klausel

$$\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}$$

lesen wir als die Disjunktion der ihr angehörenden Literalen:

$$P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee \neg P_2$$

Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen.

$\square$  ist die *leere Klausel*.

Eine Klausel

$$\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}$$

lesen wir als die Disjunktion der ihr angehörenden Literalen:

$$P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee \neg P_2$$

Eine *Klausel* ist eine endliche Menge von Literalen.

$\square$  ist die *leere Klausel*.

Eine Klausel

$$\{P_1, P_2\} \quad \{P_1, \neg P_2\}$$

lesen wir als die Disjunktion der ihr angehörenden Literale:

$$P_1 \vee P_2 \quad P_1 \vee \neg P_2$$

Die grundlegende Datenstruktur, auf der wir operieren, sind die *Mengen von Klauseln*,

$$\{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

gelesen als Konjunktion der Klauseln.

$$(P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

Bis auf die Reihenfolge der Disjunktions- bzw. Konjunktionsglieder sind also in umkehrbar eindeutiger Weise die Formeln in konjunktiver Normalform als Klauselmengen wiedergegeben.



Die grundlegende Datenstruktur, auf der wir operieren, sind die *Mengen von Klauseln*,

$$\{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

gelesen als Konjunktion der Klauseln.

$$(P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

Bis auf die Reihenfolge der Disjunktions- bzw. Konjunktionsglieder sind also in umkehrbar eindeutiger Weise die Formeln in konjunktiver Normalform als Klauselmengen wiedergegeben.

Die grundlegende Datenstruktur, auf der wir operieren, sind die *Mengen von Klauseln*,

$$\{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

gelesen als Konjunktion der Klauseln.

$$(P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

Bis auf die Reihenfolge der Disjunktions- bzw. Konjunktionsglieder sind also in umkehrbar eindeutiger Weise die Formeln in konjunktiver Normalform als Klauselmengen wiedergegeben.

Ist  $I : \Sigma \rightarrow \{W, F\}$  eine Interpretation der Atome, so hat man als zugehörige Auswertung

$val_I : \text{Mengen von Klauseln} \rightarrow \{W, F\} :$

$$val_I(M) = \begin{cases} W & \text{falls für alle } C \in M \text{ gilt:} \\ & val_I(\{C\}) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$val_I(\{C\}) = \begin{cases} W & \text{falls ein } L \in C \text{ existiert mit} \\ & I(L) = W \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

für Klauseln  $C$ ,

Es folgt also

$$val_I(\{\square\}) = F,$$

$$val_I(\emptyset) = W$$

( $\emptyset$  ist die leere Klauselmeng.)

## Definition

Die *aussagenlogische Resolutionregel* ist die Regel

$$\frac{C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_1 \cup C_2}$$

mit einer AL-Variablen  $P$  und Klauseln  $C_1, C_2$

$C_1 \cup C_2$  heisst *Resolvente* von  $C_1 \cup \{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}$ .

Der Resolutionskalkül enthält die Resolutionregel als einzige Regel.

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$



Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$

Gegeben sei die Klauselmenge

$$M = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

$$\frac{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}}{\{P_1\}}$$

$$\frac{\{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}}{\{\neg P_1\}}$$

$$\frac{\{P_1\}, \{\neg P_1\}}{\square}$$

Insgesamt:

$$M \vdash_{Res} \square$$

# Ein zweites Beispiel

Es soll gezeigt werden, dass

$$(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

eine Tautologie ist.

Dazu werden wir zeigen, dass die Negation dieser Formel

$$\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)))$$

nicht erfüllbar ist.

Klauselnormalform:

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

$$M = \{\{\neg A, B\}, \{\neg B, C\}, \{A\}, \{\neg C\}\}$$

Ableitung der leeren Klausel aus  $M$ :

- (1)  $\square$        $\{\neg A, B\}$
- (2)  $\square$        $\{\neg B, C\}$
- (3)  $\square$        $\{A\}$
- (4)  $\square$        $\{\neg C\}$
- (5)  $[1, 3]$      $\{B\}$
- (6)  $[2, 5]$      $\{C\}$
- (7)  $[4, 6]$      $\square$

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

**Rest des Beweises: Tafel/Skriptum**

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{\text{R0}} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{\text{R0}} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{\text{R0}} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $\text{val}_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

**Rest des Beweises: Tafel/Skriptum**

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

**Rest des Beweises: Tafel/Skriptum**



## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

Rest des Beweises: Tafel/Skriptum

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

Rest des Beweises: Tafel/Skriptum

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

Rest des Beweises: Tafel/Skriptum

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

Rest des Beweises: Tafel/Skriptum

## Theorem

Für eine Menge  $M$  von Klauseln gilt

$$M \text{ unerfüllbar} \Leftrightarrow M \vdash_{R0} \square.$$

*Beweis der Korrektheit: Übung*

*Beweis der Vollständigkeit:*

- Aus  $M \not\vdash_{R0} \square$  beweisen wir die Erfüllbarkeit von  $M$ .
- Beliebige aber feste Reihenfolge der Atome:  $P_0, \dots, P_n, \dots$
- $M_0$  sei die Menge aller Klauseln  $C$  mit  $M \vdash_{R0} C$ .  
Es gilt also  $M \subseteq M_0$  und  $\square \notin M_0$ .
- Wir definieren (induktiv) eine Interpretation  $I$  an, so dass:  
für alle  $C \in M_0$  gilt  $val_I(C) = W$ .  
Insbesondere ist dann  $M$  als erfüllbar nachgewiesen.

**Rest des Beweises: Tafel/Skriptum**

# Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge von Formeln

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist sicherlich nicht erfüllbar.

Es gibt die folgenden Resolutionsmöglichkeiten:

$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_2 \vee \neg P_2}$$
$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_1}$$
$$\frac{\neg P_1 \vee \neg P_1, P_1 \vee \neg P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_2}$$
$$\frac{\neg P_2 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2}{\neg P_1 \vee \neg P_2}$$

Auf diese Weise ist  $\square$  nicht herleitbar.

# Notwendigkeit der Mengenschreibweise

Die Menge von Formeln

$$E = \{P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2, \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee P_2\}$$

ist sicherlich nicht erfüllbar.

Es gibt die folgenden Resolutionsmöglichkeiten:

$$\begin{array}{r} \neg P_1 \vee \neg P_2, P_1 \vee \neg P_2 \\ \hline \neg P_2 \vee \neg P_2 \\ \neg P_1 \vee \neg P_1, P_1 \vee \neg P_2 \\ \hline \neg P_1 \vee \neg P_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \neg P_1 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2 \\ \hline \neg P_1 \vee \neg P_1 \\ \neg P_2 \vee \neg P_2, \neg P_1 \vee P_2 \\ \hline \neg P_1 \vee \neg P_2 \end{array}$$

Auf diese Weise ist  $\square$  nicht herleitbar.

Zu zeigen ist

$$\begin{array}{l} (p1 h1 \rightarrow \neg p2 h1) \\ \wedge (p1 h1 \rightarrow \neg p3 h1) \\ \wedge (p2 h1 \rightarrow \neg p3 h1) \\ \wedge (p1 h2 \rightarrow \neg p2 h2) \\ \wedge (p1 h2 \rightarrow \neg p3 h2) \\ \wedge (p2 h2 \rightarrow \neg p3 h2) \end{array} \quad \vdash \quad \begin{array}{l} (\neg p1 h1 \wedge \neg p1 h2) \\ \vee (\neg p2 h1 \wedge \neg p2 h2) \\ \vee (\neg p3 h1 \wedge \neg p3 h2) \end{array}$$



## Klauselmenge: Voraussetzungen plus negierte Behauptung

$M =$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \{\neg p_1 h_1, \neg p_2 h_1\}, & \{\neg p_1 h_1, \neg p_3 h_1\}, \\ \{\neg p_2 h_1, \neg p_3 h_1\}, & \{\neg p_1 h_2, \neg p_2 h_2\}, \\ \{\neg p_1 h_2, \neg p_3 h_2\}, & \{\neg p_2 h_2, \neg p_3 h_2\}, \\ \\ \{p_1 h_1, p_1 h_2\}, & \{p_2 h_1, p_2 h_2\}, \\ \{p_3 h_1, p_3 h_2\} & \end{array} \right\}$$

## Maschinelles Resolutionbeweis

```
1 [] -p1h1 v -p2h1.      20 [9,6] p3h1 v -p2h2.
2 [] -p1h1 v -p3h1.      23 [10,4] -p3h1 v -p2h2.
3 [] -p2h1 v -p3h1.      49 [23,20] -p2h2.
4 [] -p1h2 v -p2h2.      50 [23,14] -p3h1.
5 [] -p1h2 v -p3h2.      51 [49,15] -p1h1.
6 [] -p2h2 v -p3h2.      54 [50,9] p3h2.
7 [] p1h1 v p1h2.        55 [51,12] -p3h2.
8 [] p2h1 v p2h2.        56 [55,54] .
9 [] p3h1 v p3h2.        ----> UNIT CONFLICT .
10 [7,2] p1h2 v -p3h1.
12 [7,5] p1h1 v -p3h2.
14 [8,3] p2h2 v -p3h1.
15 [8,1] p2h2 v -p1h1.
```

Die 1-Resolutionsregel ist ein Spezialfall der allgemeinen Resolutionsregel:

$$\frac{\{P\}, C_2 \cup \{\neg P\}}{C_2} \qquad \frac{\{\neg P\}, C_2 \cup \{P\}}{C_2}$$

Der 1-Resolutionskalkül ist nicht vollständig.

Die Klauselmeng

$$E = \{\{P_1, P_2\}, \{P_1, \neg P_2\}, \{\neg P_1, P_2\}, \{\neg P_1, \neg P_2\}\}$$

ist nicht erfüllbar, aber mit 1-Resolution ist aus  $E$  nichts ableitbar, also auch nicht  $\emptyset$ .