Karlsruhe Institute of Technology

Formale Systeme

Aussagenlogik: Syntax und Semantik

Prof. Dr. Bernhard Beckert | WS 2009/2010

KIT – INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Sudoku

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Vervollständigen Sie das Sudoku so, dass

- in jeder der neun Spalten
- in jeder der neun Reihen
- und in jeder der neun Regionen

alle Zahlen von 1 bis 9 vorkommen.

Sudoku

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D^k_{i,j}$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D^9_{9,1}$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D_{i,j}^k$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D_{i,j}^k$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D_{9,1}^9$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

Lösungsweg via Aussagenlogik

Wir führen für jede Zellenposition (i, j) des Sudoku und jede Zahl k zwischen 1 und 9 eine Boolesche Variable

$$D^k_{i,j}$$

ein, mit der Vorstellung, dass $D^k_{i,j}$ den Wert *wahr* hat, wenn auf dem Feld (i, j) die Zahl k steht.

Wir benutzen kartesische Koordinaten zur Notation von Positionen.

So ist z.B. $D^9_{9,1}$ wahr, wenn in der rechten unteren Ecke die Zahl 9 steht.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{2,1} \vee D^1_{2,2} \vee D^1_{2,3} \vee D^1_{3,1} \vee D^1_{3,2} \vee D^1_{3,3}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \vee D^1_{2,9} \vee D^1_{3,9} \vee D^1_{4,9} \vee D^1_{5,9} \vee D^1_{6,9} \vee D^1_{7,9} \vee D^1_{8,9} \vee D^1_{9,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{1,4} \vee D^1_{1,5} \vee D^1_{1,6} \vee D^1_{1,7} \vee D^1_{1,8} \vee D^1_{1,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \vee D^1_{1,2} \vee D^1_{1,3} \vee D^1_{2,1} \vee D^1_{2,2} \vee D^1_{2,3} \vee D^1_{3,1} \vee D^1_{3,2} \vee D^1_{3,3}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Sudoku Regeln als AL-Formeln

$$D^1_{1,9} \lor D^1_{2,9} \lor D^1_{3,9} \lor D^1_{4,9} \lor D^1_{5,9} \lor D^1_{6,9} \lor D^1_{7,9} \lor D^1_{8,9} \lor D^1_{9,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Zeile vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \lor D^1_{1,2} \lor D^1_{1,3} \lor D^1_{1,4} \lor D^1_{1,5} \lor D^1_{1,6} \lor D^1_{1,7} \lor D^1_{1,8} \lor D^1_{1,9}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der ersten Spalte vorkommen muß.

$$D^1_{1,1} \lor D^1_{1,2} \lor D^1_{1,3} \lor D^1_{2,1} \lor D^1_{2,2} \lor D^1_{2,3} \lor D^1_{3,1} \lor D^1_{3,2} \lor D^1_{3,3}$$

sagt, dass die Ziffer 1 mindestens einmal in der Region links unten vorkommen muss.

Zusätzliche AL-Formeln

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens eine Zahl stehen kann.

$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^2_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^3_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^4_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^5_{1,1}),$
$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^6_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^7_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^8_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \wedge D^9_{1,1}),$

$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^3_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^4_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^5_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^6_{1,1}),$
$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^7_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^8_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \wedge D^9_{1,1}), \neg(D^3_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),$

usw.

Zusätzliche AL-Formeln

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens eine Zahl stehen kann.

$$\neg(D^1_{1,1} \land D^2_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \land D^3_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \land D^4_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \land D^5_{1,1}),$$
$$\neg(D^1_{1,1} \land D^6_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \land D^7_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \land D^8_{1,1}), \neg(D^1_{1,1} \land D^9_{1,1}),$$

$$\neg(D^2_{1,1} \land D^3_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \land D^4_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \land D^5_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \land D^6_{1,1}),$$
$$\neg(D^2_{1,1} \land D^7_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \land D^8_{1,1}), \neg(D^2_{1,1} \land D^9_{1,1}), \neg(D^3_{1,1} \land D^4_{1,1}),$$

usw.

Zusätzliche AL-Formeln

Die bisherigen Formeln beschreiben Sudoku noch nicht genau.

Man muss noch sagen, dass auf jeder Zelle höchstens eine Zahl stehen kann.

$$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^2_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^3_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^5_{1,1}),$$
$$\neg(D^1_{1,1} \wedge D^6_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^7_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^8_{1,1}),\ \neg(D^1_{1,1} \wedge D^9_{1,1}),$$

$$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^3_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^5_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^6_{1,1}),$$
$$\neg(D^2_{1,1} \wedge D^7_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^8_{1,1}),\ \neg(D^2_{1,1} \wedge D^9_{1,1}),\ \neg(D^3_{1,1} \wedge D^4_{1,1}),$$

usw.

Zusätzliche AL-Formeln

Karlsruhe Institute of Technology

Allgemein:

$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

Zusätzliche AL-Formeln

Allgemein:

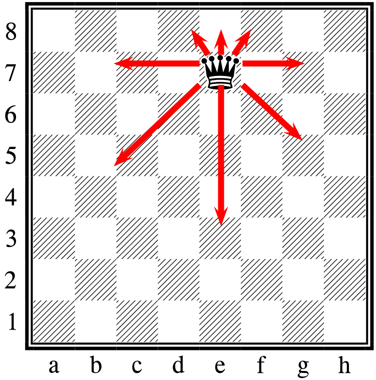
$$\neg(D^s_{i,j} \wedge D^t_{i,j})$$

für alle $1 \leq i, j, s, t \leq 9$ mit $s < t$.

Ergibt $81 * 36 = 2916$ Formeln.

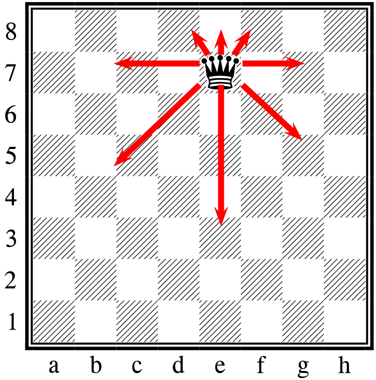
Das 8-Damen-Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.

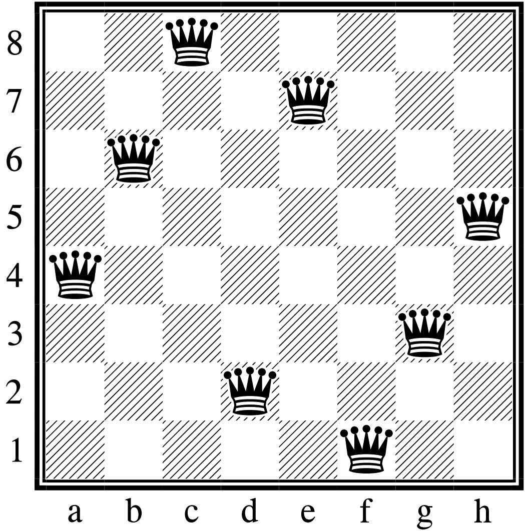


Das 8-Damen-Problem

Man plaziere acht Damen so auf einem Schachbrett, dass sie sich gegenseitig nicht bedrohen.



Eine Lösung des 8-Damen-Problems



Wiederholung

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1	Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
0	Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
$\neg$	Negationssymbol („nicht“)
$\wedge$	Konjunktionssymbol („und“)
$\vee$	Disjunktionssymbol („oder“)
$\rightarrow$	Implikationssymbol („wenn ... dann“)
$\leftrightarrow$	Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
(,)	die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1	Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
0	Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
$\neg$	Negationssymbol („nicht“)
$\wedge$	Konjunktionssymbol („und“)
$\vee$	Disjunktionssymbol („oder“)
$\rightarrow$	Implikationssymbol („wenn ... dann“)
$\leftrightarrow$	Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
(,)	die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Karlsruhe Institute of Technology

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr"
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch"
- $\neg$ Negationssymbol („nicht")
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und")
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder")
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn . . . dann")
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn")
- $($, $)$ die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Karlsruhe Institute of Technology

Logische Zeichen

1 Symbol für den Wahrheitswert „wahr“

0 Symbol für den Wahrheitswert „falsch“

$\neg$ Negationssymbol („nicht“)

$\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)

$\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)

$\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)

$\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)

(,) die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- **1** Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- **0** Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn … dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1	Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
0	Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
$\neg$	Negationssymbol („nicht“)
$\wedge$	Konjunktionssymbol („und“)
$\vee$	Disjunktionssymbol („oder“)
$\rightarrow$	Implikationssymbol („wenn … dann“)
$\leftrightarrow$	Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
(,)	die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

- $\mathbf{1}$ Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
- $\mathbf{0}$ Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
- $\neg$ Negationssymbol („nicht“)
- $\wedge$ Konjunktionssymbol („und“)
- $\vee$ Disjunktionssymbol („oder“)
- $\rightarrow$ Implikationssymbol („wenn ... dann“)
- $\leftrightarrow$ Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
- (,) die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

1	Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
0	Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
$\neg$	Negationssymbol („nicht“)
$\wedge$	Konjunktionssymbol („und“)
$\vee$	Disjunktionssymbol („oder“)
$\rightarrow$	Implikationssymbol („wenn ... dann“)
$\leftrightarrow$	Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
(,)	die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Logische Zeichen

$\mathbf{1}$	Symbol für den Wahrheitswert „wahr“
$\mathbf{0}$	Symbol für den Wahrheitswert „falsch“
$\neg$	Negationssymbol („nicht“)
$\wedge$	Konjunktionssymbol („und“)
$\vee$	Disjunktionssymbol („oder“)
$\rightarrow$	Implikationssymbol („wenn ... dann“)
$\leftrightarrow$	Symbol für beiderseitige Implikation („genau dann, wenn“)
(,)	die beiden Klammern

Vokabular der Aussagenlogik

Signatur

Eine (aussagenlogische) *Signatur* ist eine abzählbare Menge Σ von Symbolen, etwa

$$\Sigma = \{P_0, \ldots, P_n\}$$

oder

$$\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots\}.$$

Die Elemente von Σ heißen auch *atomare Aussagen*, *Atome* oder *Aussagevariablen*.

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der

Formeln über Σ

induktiv definiert durch

- $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
  $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
  $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch

  $\neg A$
  $(A \wedge B)$
  $(A \vee B)$
  $(A \rightarrow B)$
  $(A \leftrightarrow B)$

  Elemente von $For0_\Sigma$

Formeln der Aussagenlogik

Zur Signatur Σ ist $For0_\Sigma$, die Menge der

$$\textit{Formeln} \text{ über } \Sigma$$

induktiv definiert durch

- $\mathbf{1} \in For0_\Sigma$
  $\mathbf{0} \in For0_\Sigma$
  $\Sigma \subseteq For0_\Sigma$
- wenn $A, B \in For0_\Sigma$ dann sind auch

  $\neg A$
  $(A \wedge B)$
  $(A \vee B)$
  $(A \rightarrow B)$
  $(A \leftrightarrow B)$

  Elemente von $For0_\Sigma$

Semantik der Aussagenlogik

Interpretation

Es sei Σ eine aussagenlogische Signatur. Eine Interpretation über Σ ist eine beliebige Abbildung

$$I : \Sigma \to \{W, F\}.$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung

Zu jedem I über Σ wird eine zugehörige Auswertung der Formeln über Σ definiert

$$val_I : For0_\Sigma \to \{W, F\}$$

mit:

$$\begin{aligned} val_I(\mathbf{1}) &= W \\ val_I(\mathbf{0}) &= F \\ val_I(P) &= I(P) \qquad \text{für jedes } P \in \Sigma \end{aligned}$$

$$val_I(\neg A) = \begin{cases} F & \text{falls} \quad val_I(A) = W \\ W & \text{falls} \quad val_I(A) = F \end{cases}$$

Semantik der Aussagenlogik

Auswertung (Forts.)

val_I auf $(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$ wird gemäß der folgenden Tabelle berechnet

$val_I(A)$	$val_I(B)$	val_I $(A \wedge B)$	val_I $(A \vee B)$	val_I $(A \rightarrow B)$	val_I $(A \leftrightarrow B)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Quiz

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

Quiz

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *ja*

Quiz

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ *ja*

2 $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	*nein*

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	*nein*
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	*nein*
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	*nein*

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	*nein*
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	*nein*
5	$(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$	

Quiz

1	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	*ja*
2	$\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$	*ja*
3	$\neg(A \vee B) \rightarrow (A \vee B)$	*nein*
4	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	*nein*
5	$(\neg A \vee B) \vee (A \wedge \neg B)$	*ja*

Logische Grundbegriffe

Karlsruhe Institute of Technology

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
  gdw
  es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
  gdw
  es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
  gdw
  es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe

Definition

- Ein Modell einer Formel $A \in For0_\Sigma$ ist eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.
- Zu einer Formelmenge $M \subseteq For0_\Sigma$ ist ein Modell von M eine Interpretation I, welche Modell von jedem $A \in M$ ist.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt allgemeingültig
  gdw
  $val_I(A) = W$ für jede Interpretation I über Σ.
- $A \in For0_\Sigma$ heißt erfüllbar
  gdw
  es gibt eine Interpretation I über Σ mit $val_I(A) = W$.

Logische Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma$, $A, B \in For0_\Sigma$.

- $M \models A$ lies: aus M folgt A
  gdw
  Jedes Modell von M ist auch Modell von A.
- $A, B \in For0_\Sigma$ heißen logisch äquivalent
  gdw
  $A \models_\Sigma B$ und $B \models_\Sigma A$

Logische Grundbegriffe (Forts.)

Definition

Σ sei eine Signatur, $M \subseteq For0_\Sigma$, $A, B \in For0_\Sigma$.

- $M \models A$ lies: aus M folgt A
  gdw
  Jedes Modell von M ist auch Modell von A.
- $A, B \in For0_\Sigma$ heißen logisch äquivalent
  gdw
  $A \models_\Sigma B$ und $B \models_\Sigma A$

Beispiele allgemeingültiger Formeln

$A \to A$	Selbstimplikation
$\neg A \vee A$	Tertium non datur
$A \to (B \to A)$	Abschwächung
$\mathbf{0} \to A$	Ex falso quodlibet
$A \wedge A \leftrightarrow A$	Idempotenz
$A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$	Absorption
$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Distributivität
$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	Distributivität

Beispiele allgemeingültiger Formeln (Forts.)

$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$	Kontraposition
$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow$	
$((A \to B) \to (A \to C))$	Verteilen
$\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$	De Morgan
$\neg(A \land B) \leftrightarrow \neg A \lor \neg B$	De Morgan

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar gdw* $\neg A$ *nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw* *A ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw* *A ist unerfüllbar*
- $A \models B$ *gdw* $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ *gdw* $M \models A \rightarrow B$
- *A, B sind logisch äquivalent gdw* $A \leftrightarrow B$ *ist allgemeingültig*

Einfache Sätze

Theorem

- A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- $A \models B$ gdw $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \rightarrow B$
- A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig

Einfache Sätze

Theorem

- A *erfüllbar* *gdw* $\neg A$ *nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw* A *ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw* A *ist unerfüllbar*
- $A \models B$ *gdw* $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ *gdw* $M \models A \rightarrow B$
- A, B *sind logisch äquivalent* *gdw* $A \leftrightarrow B$ *ist allgemeingültig*

Einfache Sätze

Theorem

- A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig
- $\models A$ gdw A ist allgemeingültig
- $\models \neg A$ gdw A ist unerfüllbar
- $A \models B$ gdw $\models A \to B$
- $M \cup \{A\} \models B$ gdw $M \models A \to B$
- A, B sind logisch äquivalent gdw $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig

Einfache Sätze

Theorem

- A *erfüllbar* *gdw* $\neg A$ *nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw* A *ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw* A *ist unerfüllbar*
- $A \models B$ *gdw* $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ *gdw* $M \models A \rightarrow B$
- A, B *sind logisch äquivalent* *gdw* $A \leftrightarrow B$ *ist allgemeingültig*

Einfache Sätze

Theorem

- *A erfüllbar gdw $\neg A$ nicht allgemeingültig*
- $\models A$ *gdw A ist allgemeingültig*
- $\models \neg A$ *gdw A ist unerfüllbar*
- $A \models B$ *gdw* $\models A \rightarrow B$
- $M \cup \{A\} \models B$ *gdw* $M \models A \rightarrow B$
- *A, B sind logisch äquivalent gdw*
  $A \leftrightarrow B$ ist allgemeingültig