UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert
M. Ulbrich

Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 9

Dieses Blatt wurde in der Übung am 23.1.2009 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Die Idee dahinter ist die folgende: Für einen Knoten bestimmen wir die Menge der erreichbaren Knoten. Gibt es einen Knoten, der selbst in der Menge der von ihm erreichbaren Knoten (also der transitiven Hülle der Kantenrelation) liegt, muss es einen Zyklus geben.

Wir suchen zunächst nach einer Formel $\tau(x)$, die dafür sorgt, dass $Q(y)$ zu wahr auswertet, wenn y von x aus erreichbar ist:

$$\tau(x) := \forall y \forall z \big((p(x,y) \to Q(y)) \land (Q(y) \land p(y,z) \to Q(z))\big)$$

Wenn $\tau(x)$ gilt, dann ist erreicht, dass $Q(z)$ *zumindest* alle von x durch p erreichbaren Knoten zu wahr auswertet (wegen $p(x,y) \to Q(y)$), aber auch die, welche von Q ausgehend durch p erreichbar sind (wegen $Q(y) \land p(y,z) \to Q(z)$). Wenn $\tau(x)$ erfüllt ist, ist $val(Q)$ damit eine Obermenge der von x aus durch p erreichbaren Elemente. Wir können in der Logik erster Stufe bekanntermaßen nicht fordern, dass es *genau* für die erreichbaren Knoten zu wahr wird.

In der Logik zweiter Stufe können wir aber über das Prädikat Q quantifizieren und können damit fordern, dass eine Aussage für *alle* Obermengen der Menge der erreichbaren Knoten gilt. Dann muss sie insbesondere auch für die Menge selbst gelten.

Wir fordern jetzt also, dass es ein x gibt, so dass $Q(x)$ für *alle Obermengen* der Erreichbarkeitsmenge gilt. Dabei ist Q eine Variable höherer Ordnung:

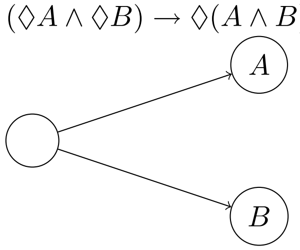
$$\begin{aligned} \varrho &= \exists x \forall Q(\tau(x) \to Q(x)) \\ &= \exists x \forall Q((\forall y \forall z(p(x,y) \to Q(y) \land (Q(y) \land p(y,z) \to Q(z)))) \to Q(x)) \end{aligned}$$

Bemerkung: Hier wurde der Lesbarkeit wegen p verwendet, wo eigentlich $I(p)$ stehen müsste (u.ä.), aber mit fortgeschrittenem Verständnis von Syntax/Semantik sollte diese Ungenauigkeit keine Verwirrung mehr stiften.

Zu Aufgabe 2

Die betrachtete Signatur für diese Aufgabe ist $\Sigma = \{A, B\}$. Für die grafische Darstellung einer Kripkestruktur werden in den Zuständen genau diejenigen Literale angegeben, die in ihm zu wahr ausgewertet werden.

(a) $(\Diamond A \land \Diamond B) \to \Diamond(A \land B)$ ist nicht allgemeingültig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:



(b) $\neg\Diamond\mathbf{0}$ ist allgemeingültig, denn für jede Kripkestruktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ gilt:

$$\mathcal{K} \models \neg\Diamond\mathbf{0} \iff \mathcal{K} \models \Box\neg\mathbf{0} \iff \mathcal{K} \models \Box\mathbf{1} \iff s \models \mathbf{1} \text{ für alle } s \in S$$

(c) $(\Diamond A \to \Diamond\Box A) \leftrightarrow (\Box\Diamond\neg A \to \Box\neg A)$ ist allgemeingültig, denn die Formel ist eine Instanz der aussagenlogischen Tautologie (Kontraposition)

$$(F \to G) \leftrightarrow (\neg G \to \neg F)$$

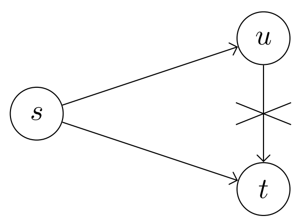
mit $F = \Diamond A$ und $G = \Diamond\Box A$. Das endgültige Resultat erhält man nach Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} & (\Diamond A \to \Diamond\Box A) \leftrightarrow (\neg\Diamond\Box A \to \neg\Diamond A) \\ \leftrightarrow \quad & (\Diamond A \to \Diamond\Box A) \leftrightarrow (\Box\Diamond\neg A \to \Box\neg A) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 3

- Gegeben sei ein nicht-euklidischer Kripke-Rahmen (S, R). Zu zeigen ist, dass $(S, R) \not\models \Diamond A \to \Box\Diamond A$, dazu müssen wir zeigen, dass es ein I gibt mit $(S, R, I) \not\models \Diamond A \to \Box\Diamond A$

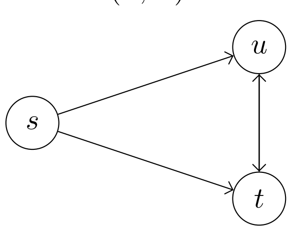
  Da (S, R) nicht euklidisch ist, muss in R folgende Situation existieren:



  Wir betrachten eine Struktur (S, R, I) mit $I(t, A) = W$ und $I(x, A) = F$ für alle $x \neq t$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} s &\models \Diamond A \\ u &\not\models \Diamond A \\ \text{und damit } s &\not\models \Box\Diamond A \qquad \text{Widerspruch zur Annahme!} \end{aligned}$$

- Sei nun (S, R) euklidisch. Zu zeigen ist, dass $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ in allen Kripkestrukturen (S, R, I) ist.



  In einem beliebigen Zustand $s \in S$ gelte $s \models \Diamond A$, d.h., es existiert ein $t \in S$ mit $R(s, t)$ und $t \models A$. Es ist nun zu zeigen, dass $s \models \Box\Diamond A$. Sei $u \in S$ ein beliebiger Zustand mit $R(s, u)$. Weil (S, R) euklidisch ist, gilt auch $R(u, t)$, damit $u \models \Diamond A$ und, weil u beliebig war, auch $val_x(\Box\Diamond A)$.

Zu Aufgabe 4

Zur Erinnerung: Eine Äquivalenzrelation ist eine transitive, reflexive und symmetrische Relation.

1. $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ ist allgemeingültig, da diese Formel die transitiven Kripkerahmen charakterisiert.

   Bleibt die Gegenrichtung $\Box\Box A \rightarrow \Box A$. Sie ist allgemeingültig, da sie die dichten Kripkerahmen charakterisiert und jede reflexive Relation dicht ist:

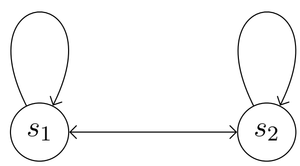
   R ist dicht, wenn es für alle x, y mit xRy ein z gibt mit xRz und zRy. Wegen der Reflexivität erfüllt x die Rolle des z: xRx (refl.) und xRy (gegeben).

2. $\Box A \rightarrow \Diamond A$ ist allgemeingültig:

   Zu zeigen ist, dass für alle Zustände $s \in S$ gilt: Wenn in allen Zuständen mit sRs' gilt, dass $s' \models A$, dann gibt es auch einen solchen Zustand s'' mit sRs'' und $s'' \models A$. Wegen der Reflexivität gilt aber immer sRs und da A in allen Nachfolgezuständen gilt, muss es auch in s gelten, also gilt auch $s \models \Diamond A$.

   Oder: Diese Formel charakterisiert alle endlosen Kripkerahmen und alle Kripkerahmen, deren Zugänglichkeitsrelation eine Äquivalenzrelation ist, sind endlos.

3. $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$ ist nicht allgemeingültig, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

   Es gelte: $I(A, s_1) = W$ und $I(A, s_2) = F$.
   Damit gilt : $val_{s_1}(\Box\Diamond A) = W$ und $val_{s_1}(\Diamond\Box A) = F$

4. $\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$ ist allgemeingültig.

   - $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ ist allgemeingültig: Falls $s \models \Diamond A$ für ein $s \in S$, dann $t \models$ A für ein t mit $R(s, t)$. Zu zeigen ist, dass $s \models \Box\Diamond A$, d.h., für beliebiges u mit $R(s, u)$ gilt $u \models \Diamond A$. Aus der Symmetrie folgt $R(u, s)$ und damit und der Transitivität folgt $R(u, t)$, d.h., $u \models \Diamond A$.
   - $\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond A$ ist allgemeingültig, denn aus der Reflexivität folgt aus $s \models \Box\Diamond A$ für jeden Zustand $s \in S$ auch $s \models \Diamond A$.

Zu Aufgabe 5

Zunächst die Transformation einer modallogischen Struktur $\mathcal{K} = (S, R, I)$ über der Signatur Σ in eine prädikatenlogische Struktur $\mathcal{K}' = (D_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'})$ über $\Sigma_{\mathcal{K}'}$.

$$\begin{array}{rcl} D_{\mathcal{K}'} & = & S \\ \Sigma_{\mathcal{K}'} & = & (\emptyset, \Sigma \cup \{r\}, \alpha) \\ \alpha(p) & = & 1 \text{ für } p \in \Sigma \\ \alpha(r) & = & 2 \\ I_{\mathcal{K}'}(p) & = & \{s \in S : I(p, s) = W\} \\ I_{\mathcal{K}'}(r) & = & R \end{array}$$

Das PL-Universum entspricht der Menge der möglichen Welten der Kripkestruktur. Für eine modallogische Formel φ suchen wir daher nun eine PL-Formel $\tilde{\varphi}$, die eine freie Variable x besitzt. Die Belegung von x bestimmt die Welt, in der die Formel „ausgewertet“ werden soll. Dazu transformieren wir durch die folgende, rekursiv anzuwendende Abbildung:

Modallogik φ	Prädikatenlogik $\tilde{\varphi}$	
p	$p(x)$	AL-Atome werden zu Anwendungen von Prädikaten
$\psi \circ \chi$	$\tilde{\psi} \circ \tilde{\chi}$	AL-Verknüpfungen bleiben erhalten
$\Box\psi$	$\forall y(r(x,y) \rightarrow \tilde{\psi}[x \leftarrow y])$	$\Box$ wird zum Allquantor, wobei die Variable y neu gewählt sein muss, also in $\tilde{\psi}$ nicht auftreten darf.
$\Diamond\psi$	$\exists y(r(x,y) \wedge \tilde{\psi}[x \leftarrow y])$	$\Diamond$ wird zum Existenzquantor, wobei die Variable y neu gewählt sein muss, also in $\tilde{\psi}$ nicht auftreten darf.

Offensichtlich enthält jedes $\tilde{\varphi}$ genau eine freie Variable: x. Diese entspricht dem Zustand, in dem die Formel ausgewertet werden soll. Entsprechend bedeutet z.B. die Übersetzung des $\Box$-Operators, dass eine Formel in allen Zuständen y, für die $r(x,y)$ wahr ausgewertet wird, auch wahr ausgewertet werden muss.

Die Aussage $\mathcal{K}, s \models \varphi$ ist damit genau dann wahr, wenn die Aussage $\mathcal{K}', I'_{\mathcal{K}'}, \beta_x^s \models \tilde{\varphi}$ wahr ist. Die Aussage ist in jeder Kripkewelt gültig ($\mathcal{K} \models \varphi$), wenn $\mathcal{K}', I'_{\mathcal{K}'} \models \forall x\ \tilde{\varphi}$ wahr ist. Setze also $\varphi' := \forall x\ \tilde{\varphi}$.

Da umgekehrt aus jeder PL-Interpretation auch eine Kripkestruktur abgeleitet werden kann, gilt sogar die Aussage:

$$\varphi \text{ ist allgemeingültig in allen Kripkestrukturen gdw. } \varphi' \text{ ist prädikatenlogisch allgemeingültig.}$$