UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. B. Beckert

Formale Systeme, WS 2008/2009

Lösungen zum Übungsblatt 1

Dieses Blatt wurde in der Übung am 31.10.2008 besprochen.

Zu Aufgabe 1

Alle diese Aufgaben lassen sich leicht durch (a) Angabe einer Wertetabelle oder (b) Transformation in Normalform mit Hilfe von Äquivalenzumformungen lösen. Man gewinnt aber mehr an Intuition, wenn man analytischer vorgeht.

1. $A \to ((A \to B) \to B)$
   Sei I eine beliebige Interpretation.

   Fall 1: Wird die *Prämisse* A (der linke Teil der Implikation) unter I zu falsch ausgewertet, gilt also $\mathrm{val}_I(A) = F$, so ist die ganze Aussage wahr.

   Fall 2: Nehmen wir an, es gelte $\mathrm{val}_I(A) = W$. Dann müssen wir zeigen, dass auch die *Konklusion* $K = (A \to B) \to B$ (der rechte Teil der Implikation) unter I zu wahr auswertet. Fall 2 a: Ist in der inneren Implikation $A \to B$ falsch, ist die Konklusion wahr und die Aussage bewiesen. Fall 2 b: Sei also nun $\mathrm{val}_I(A \to B) = W$. Dann ist wegen $\mathrm{val}_I(A) = W$ und des *Modus Ponens* auch $\mathrm{val}_I(B) = W$, und also $\mathrm{val}_I(K) = W$. □

2. $(A \to (A \to B)) \to B$
   Wir zeigen, dass dies keine Tautologie ist. Dazu suchen wir eine Interpretation, die die Formel falsch macht: Diese muss B falsch machen und $A \to (A \to B)$ wahr. Offensichtlich ist dies erfüllt durch eine Interpretation mit $I(A) = F$ und $I(B) = F$. □

3. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
   Fall 1: Ist die Prämisse $(A \to B)$ falsch, dann ist die Formal insgesamt wahr.

   Fall 2: Sei also $A \to B$ wahr. Nun gilt es, zu zeigen, dass $(B \to C) \to (A \to C)$ auch wahr ist. Dies ist trivial gegeben, wenn (Fall 2 a) $B \to C$ falsch ist. Fall 2 b: Sei also $B \to C$ wahr. Dann folgt – wegen der Transitivität der Implikation – aus $A \to B$ und $B \to C$, dass auch $A \to C$ wahr ist. □

   Interessant ist es hier zu beobachten, dass diese Implikation in gewisser Weise „kontravariant“ ist, d.h., dass A aus der Prämisse in die Konklusio wandert und B umgekehrt.

4. $(A \land \neg A \to B) \land C$
   Interpretationen I mit $I(C) = F$ erfüllen diese Aussage nicht. Daher ist diese Aussage keine Tautologie. □

Zu Aufgabe 2

Exemplarisch für A'; A'' analog.

$$\begin{aligned}
A &= (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \\
&\overset{1}{\equiv} (P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land R) \lor (P \land Q \land R) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (P \land \neg Q \land R) \\
&\overset{2}{\equiv} (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land Q)
\end{aligned}$$

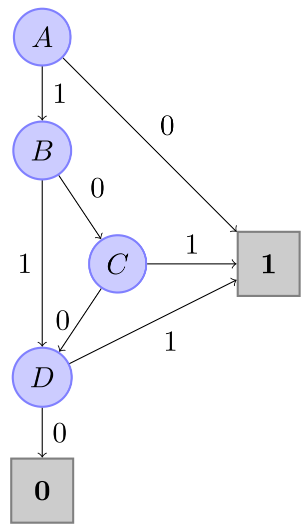

Abbildung 1: Shannon-Graph zu Aufgabe 3

Es wird die *Kommutativität* und *Assoziativität* gebraucht, um die Teilformeln umzustellen oder umzugruppieren.

Zu 1: Die erste Teilformel kann wegen der *Idempotenz* von $\vee$ dupliziert werden und wird am Ende hinzugefügt.

Zu 2: Jeweils zwei Teilformeln lassen sich dann wegen *Distributivität* (a), *Tertium-non-datur* (b) und der Eigenschaft von **1** als *neutralem Element* bezgl. $\wedge$ (c) reduzieren, beispielsweise:

$$\begin{aligned} & (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\ \overset{(a)}{\equiv} \quad & (P \wedge \neg Q) \wedge (R \vee \neg R) \\ \overset{(b)}{\equiv} \quad & (P \wedge \neg Q) \wedge \mathbf{1} \overset{(c)}{\leftrightarrow} P \wedge \neg Q \end{aligned}$$

Man soll sehen, dass die beiden Formeln A' und A'' beide (minimale) DNF für A sind und diese daher (obwohl Normalform) überhaupt nicht eindeutig ist.

Zu Aufgabe 3

1. siehe Abbildung 1. Wenn man den Graphen nach Algorithmus erstellt, erhält man zunächst 2 Knoten mit Beschriftung D, deren Untergraphen aber isomorph sind und der Graph daher auf einen mit einem solchen Knoten reduziert werden kann und muss.

2. $sh(A, 1, sh(B, sh(C, sh(D, 0, 1), 1), sh(D, 0, 1)))$

Zu Aufgabe 4

$$sh(P_1, sh(P_2, 0, sh(P_3, 1, 0)), sh(P_2, sh(P_3, 0, 1), 1))$$

Das zeigt, dass die Reihenfolge der Variablen durchaus von Bedeutung ist bei BDDs!

Zu Aufgabe 5

Zu (a): Die natürlichste DNF ist die Disjunktion aller Pfade zur **1**. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei konjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung **1** mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung **0** mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(P_1 \wedge \neg P_3) \vee (\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge P_3) \vee (\neg P_1 \wedge P_2)$$

Zu (b): Wie so oft ist das das Duale: Die Konjunktion aller Pfade zur 0. Die genommenen Kanten eines Pfades werden dabei disjunktiv verknüpft: Bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{0}(!)}$ mit dem Literal des verlassenen Knotens, bei Kanten-Markierung $\boxed{\mathbf{1}(!)}$ mit der Negation des entsprechenden Literals.

$$(\neg P_1 \vee \neg P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3)$$

Idee: Während man bei (a) alle möglichen Wege zur 1 aufzählt, stellt man in (b) Bedingungen auf, damit die 0 vermieden wird.

Zu Aufgabe 6

Geht man streng nach Schema vor, so beginnt man mit einem vollständigen Entscheidungsbaum (s. Abb. 1) und wendet darauf das Reduktionsverfahren aus der Vorlesung an. Zunächst wird man feststellen, dass die P_4-Unterbäume wegen Isomorphie auf zwei reduziert werden können. Im entstehenden Graphen sind je zwei bei einem P_3-Knoten beginnende Untergraphen isomorph, die beiden P_2 bleiben erhalten. Insgesamt ergibt sich Abbildung 2.

Man kann auch direkt auf diese Darstellung kommen, wenn man von der Aufgabenstellung selbst ausgeht. Es spielt bei der Auswertung des Graphen keine Rolle in welcher Nullen und Einsen aufeinander folgen, einzig die bisherige Parität der Eingabe ist relevant. Z.B. sollten wir uns beim Auswerten von P_4 im selben Knoten befinden, egal, ob $(P_1, P_2, P_3) = (1, 0, 0)$ oder $(0, 1, 0)$ oder $(1, 1, 1)$ war. Einzig die bisherige Parität und die Belegung von P_4 sind entscheidend für die weitere Auswertung. Da es nur 2 Paritätszustände gibt, ist klar, dass es für $i \geq 2$ genau 2 Knoten mit der Beschriftung P_i geben muss. Eine 1 führt dabei zur jeweils anderen „Paritäts-Gruppe", eine 0 erhält die Parität.

Weiterführende Frage: Wie sieht der reduzierte Shannongraph für die allgemeine Funktion f_n aus?

Das oben gessagte gilt auch für allgemeines n: Das Verhalten hängt nicht von der Belegung der vorangegangenen Variablen ab, sondern nur von deren Parität, damit wird es weiter für jede Variable zwei Knoten geben, für jede Parität einen.

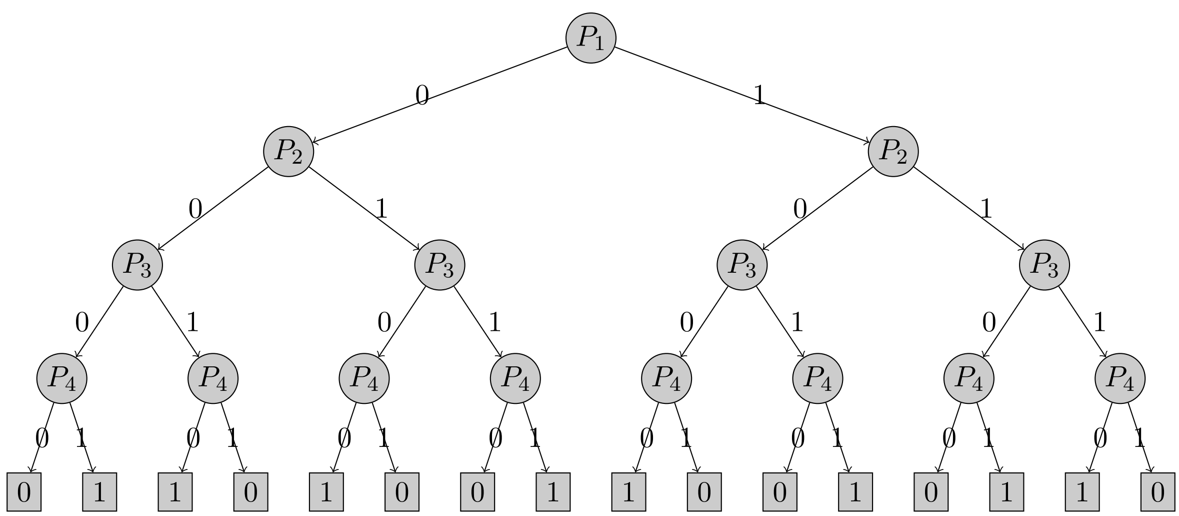

Abbildung 2: Ausgangsbaum für Aufgabe 6

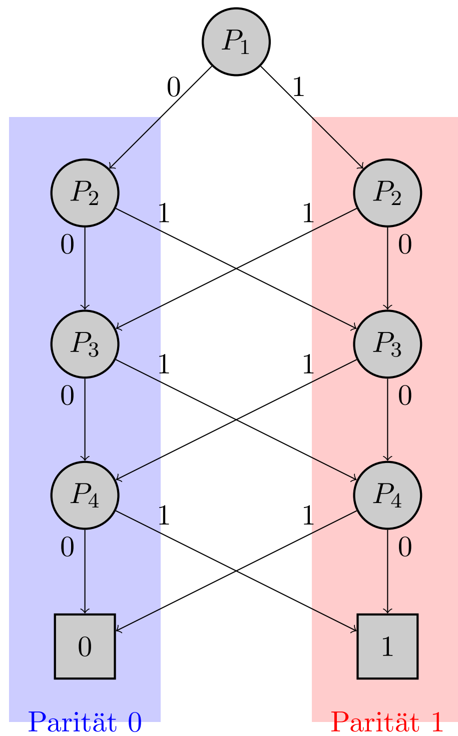

Abbildung 3: Shannongraph zu Aufgabe 6