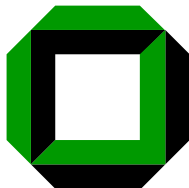


# *Formale Systeme*

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik  
Universität Karlsruhe (TH)



Winter 2008/2009



# Hilbertkalkül

## Axiome und Regeln

Axiome sind Schemata!  $x$  steht für eine Variable,  $t$  für einen Term,  
 $A, B, C$  stehen für Formeln.

Ax1:  $A \rightarrow (B \rightarrow A)$  (Abschwächung)

Ax2:  $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$  (Verteilung von  $\rightarrow$ )

Ax3:  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$  (Kontraposition)

Ax4:  $\forall x A \rightarrow \{x/t\}(A)$   $\{x/t\}$  kollisionsfrei für  $A$  (Instantiierung)

Ax5:  $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B)$   $x \notin \text{Frei}(A)$  ( $\forall$ -Verschiebung)

Mp: 
$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$
 (Modus ponens)

Gen: 
$$\frac{A}{\forall x A}$$
 (Generalisierung)



# Vollständigkeit der PL1

## GÖDEL1931

### *Theorem*

$\Sigma$  sei eine Signatur der PL1.

Dann ist  $\mathbf{H}$  über  $\Sigma$  korrekt und vollständig: für alle  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ ,  $A \in \text{For}_\Sigma$  gilt:

$$M \models A \iff M \vdash_{\mathbf{H}} A$$



## Konsequenzen der Korrektheit und Vollständigkeit

### Theorem (Kompaktheitsatz)

Für beliebige  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$ ,  $A \in \text{For}_\Sigma$  gilt:

$$\begin{aligned} M \models A \\ \Leftrightarrow \\ E \models A \text{ für eine endliche Teilmenge } E \subseteq M. \end{aligned}$$

### Theorem (Endlichkeitssatz)

Eine Menge  $M \subseteq \text{For}_\Sigma$  hat genau dann ein Modell, wenn jede endliche Teilmenge von  $M$  ein Modell hat.

Der Endlichkeitssatz ist der Spezialfall  $A = \mathbf{0}$  des Kompaktheitsatzes.



## *Beweis des Kompaktheitsatzes*

$$M \models A$$

$$\Leftrightarrow M \vdash A \quad (\text{Korrektheit und Vollständigkeit})$$

$$\Leftrightarrow E \vdash A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$

Endlichkeit von Ableitungen

$$\Leftrightarrow E \models A \quad \text{für ein endliches } E \subseteq M$$

Korrektheit u. Vollständigkeit



# Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

## Theorem

Es gibt *keine* Formel  $F$  der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen  $\mathcal{M}$  gilt:

$$\mathcal{M} \models F \iff \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$



# Grenzen der Prädikatenlogik erster Stufe

## Theorem

Es gibt **keine** Formel  $F$  der Prädikatenlogik erster Stufe, so daß für alle Strukturen  $\mathcal{M}$  gilt:

$$\mathcal{M} \models F \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M} \text{ ist endlich.}$$

**Beweis:** Angenommen ein solches  $F$  existiert.

Wir definieren Hilfsformeln:  $A_n = \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i < j \leq n} \neg(x_i \doteq x_j)$

Offensichtlich gilt  $\mathcal{M} \models A_n \Leftrightarrow \mathcal{M}$  hat mindestens  $n$  Elemente.  
Jede endliche Teilmenge von

$$\Gamma = \{F\} \cup \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ist erfüllbar, aber  $\Gamma$  selbst ist nicht erfüllbar.

**Widerspruch zum Endlichkeitssatz!**

