Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Sonstige Kalküle

- Davis-Putnam-Verfahren
- Numerische Verfahren

Das Davis-Putnam-Verfahren

S eine Menge von Klauseln.

1. Programm widerlege(S):
2. falls $S = \emptyset$, Ende (S ist erfüllbar).
3. falls S keine Einerklausel enthält, wähle eine Variable P ; widerlege(S_P) ; widerlege($S_{\neg P}$).
4. sonst wähle eine Einerklausel $K \in S$
5. $S =$ reduziere(K,S)
   - Lasse alle Klauseln weg, die K als Literal enthalten,
   - Lasse in allen übrigen Klauseln das zu K komplementäre Literal weg.
6. falls $\Box \in S$, Ende (S widersprüchlich), sonst widerlege(S).

$S_P = S \cup \{\{P\}\}$, bzw. $S_{\neg P} = S \cup \{\{\neg P\}\}$.

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \lor P_2 \lor P_3 & \neg P_1 \lor P_2 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von widerlege(S) wird das Unterprogramm reduziere($\neg P_2$,S) aufgerufen.

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

Wir beginnen mit der Klauselmenge S

$$\begin{array}{ll} P_1 \lor P_2 \lor P_3 & \neg P_1 \lor P_2 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 & \neg P_2 \end{array}$$

Beim ersten Aufruf von widerlege(S) wird das Unterprogramm reduziere($\neg P_2$,S) aufgerufen und liefert S_1:

$$\begin{array}{ll} P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 & \end{array}$$

blau = unverändert

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

S_1:

$$\begin{array}{ll} P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 & \end{array}$$

S_1 enthält keine Einerklausel. Die Variable P_1 wird gewählt und widerlege($S_{1,0}$) und widerlege($S_{1,1}$) werden aufgerufen.

$$\begin{array}{ll} S_{1,0}: & S_{1,1}: \\ P_1 \lor P_3 & P_1 \lor P_3 \\ \neg P_1 \lor \neg P_4 & \neg P_1 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 & \neg P_1 \lor P_3 \\ \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 & \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 & P_1 \lor \neg P_3 \\ P_1 & \neg P_1 \end{array}$$

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{array}{l} S_{1,0}: \\ P_1 \lor P_3 \\ \neg P_1 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 \\ \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 \\ P_1 \end{array}$$

reduziere(P_1,$S_{1,0}$)

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$$\begin{array}{l} S_{1,0}: \\ P_1 \lor P_3 \\ \neg P_1 \lor \neg P_4 \\ \neg P_1 \lor P_3 \\ \neg P_1 \lor \neg P_3 \lor P_4 \\ P_1 \lor \neg P_3 \\ P_1 \end{array}$$

reduziere(P_1,$S_{1,0}$): Die Klauseln werden gestrichen.

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

reduziere(P_1,$S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

reduziere(P_1,$S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere(P_3, $S_{2,0}$) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$

reduziere(P_1,$S_{1,0}$) führt zu $S_{2,0}$:

$$\{\neg P_4, P_3, \neg P_3 \vee P_4\}$$

Der Aufruf von reduziere(P_3, $S_{2,0}$) liefert

$$\{\neg P_4, P_4\}$$

Dann:

$$\text{reduziere}(P_4, \{P_4, \neg P_4\}) = \{\Box\}$$

woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,0}$ folgt.

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,0}$:	$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$	$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$	$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$	$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$	$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$	$P_1 \vee \neg P_3$
P_1	$\neg P_1$

Jetzt kommt die Abarbeitung von widerlege($S_{1,1}$) an die Reihe.

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_4$
$\neg P_1 \vee P_3$
$\neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4$
$P_1 \vee \neg P_3$
$\neg P_1$

reduziere($\neg P_1$, $S_{1,1}$) entfernt die Klauseln, in denen $\neg P_1$ vorkommt ...

Beispiel
zum Davis-Putnam-Verfahren

$S_{1,1}$:
$P_1 \vee P_3$
$P_1 \vee \neg P_3$

... und streicht in den restlichen P_1.
Das liefert

$$\{P_3, \neg P_3\}$$

woraus im nächsten Schritt

$$\{\Box\}$$

entsteht,
woraus die Unerfüllbarkeit von $S_{1,1}$ und damit insgesamt die Unerfüllbarkeit von S folgt.

Ein Numerisches Verfahren

Gegeben: eine KNF A $= D_1 \wedge \cdots \wedge D_k$
U_i entstehe aus D_i, indem:

P_j	ersetzt wird durch	X_j,
$\neg P_j$	durch	$(1 - X_j)$
$\vee$	durch	$+$

U(A) ist die Menge der Ungleichungen

$$U_i \geq 1 \text{ für alle } i$$

und

$$0 \leq X_j \leq 1 \text{ für alle } j$$

Theorem

Theorem

A ist erfüllbar

gdw

das Gleichungssystem U(A) in den ganzen Zahlen lösbar ist.

Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich U(E):

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 + (1 - X_2) \geq 1 \\ (1 - X_1) + X_2 \geq 1 & (1 - X_1) + (1 - X_2) \geq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich U(E):

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 + (1 - X_2) \geq 1 \\ (1 - X_1) + X_2 \geq 1 & (1 - X_1) + (1 - X_2) \geq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Vereinfacht:

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 - X_2 \geq 0 \\ X_2 - X_1 \geq 0 & X_1 + X_2 \leq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Beispiel

Für

$$E = (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee \neg P_2) \wedge (\neg P_1 \vee P_2) \wedge (\neg P_1 \vee \neg P_2)$$

ergibt sich U(E):

$$\begin{array}{ll} X_1 + X_2 \geq 1 & X_1 - X_2 \geq 0 \\ X_2 - X_1 \geq 0 & X_1 + X_2 \leq 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Weiter vereinfacht:

$$\begin{array}{ll} X_1 = X_2 & X_1 + X_2 = 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist unlösbar mit ganzen Zahlen.

Lösbarkeit in den rationalen Zahlen

Die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} X_1 = X_2 & X_1 + X_2 = 1 \\ 0 \leq X_1 \leq 1 & 0 \leq X_2 \leq 1 \end{array}$$

sind allerdings lösbar für rationale Zahlen.

Theorem

$U(S)$ besitzt keine rationale Lösung
gdw
aus S ist mit 1-Resolution $\square$ herleitbar.

Beweis (1)

Sei S eine Menge von Klauseln, aus der mit 1-Resolution die leere Klausel $\square$ nicht herleitbar ist. Dann gibt es eine konsistente Menge ML von Literalen und eine nicht leere Menge von Klauseln S_0 ohne Einerklauseln, so dass S erfüllbar ist genau dann, wenn $ML \cup S_0$ erfüllbar ist. Ordnet man den positiven Literalen in ML den Wert 1, den negativen Literalen in ML den Wert 0 und allen anderen Atomen den Wert $\frac{1}{2}$ zu, so sind alle Gleichungen in $\mathrm{U}(ML \cup S_0)$ erfüllt und damit auch alle Gleichungen in dem ursprünglichen $\mathrm{U}(S)$.

Beweis (2)

Kann man aus S mit 1-Resolution die leere Klausel herleiten und ist ML die Menge der Literale, die dabei als Einerklauseln auftreten, dann ist eine Belegung b der Variablen mit rationalen Zahlen eine Lösung für $\mathrm{U}(S)$ genau dann, wenn b eine Lösung für $\mathrm{U}(ML)$ ist. $\mathrm{U}(ML)$ enthält aber nur Gleichungen der Form $x = 1$ oder $x = 0$, so dass jede Lösung eine ganzzahlige Lösung ist. Da aus ML außerdem $\square$ ableitbar ist, existiert auch keine ganzzahlige Lösung.

Beispiel 2

Dieses Beispiel ist die Übersetzung der Klauselmenge S, die wir schon bei der Vorstellung des Davis-Putnam-Verfahrens betrachtet hatten.

$S =$

$$\begin{array}{ll}
P_1 \vee P_2 \vee P_3 & \neg P_1 \vee P_2 \vee \neg P_4 \\
\neg P_1 \vee P_3 & \neg P_1 \vee \neg P_3 \vee P_4 \\
P_1 \vee \neg P_3 & \neg P_2
\end{array}$$

Beispiel 2
Fortsetzung

$U(S) =$

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & \geq & 1 \\
-X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq & -1 \\
-X_1 & + & & & X_3 & & & \geq & 0 \\
-X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq & -1 \\
X_1 & & & - & X_3 & & & \geq & 0 \\
 & - & X_2 & & & & & \geq & 0
\end{array}$$

$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$

Beispiel 2
Fortsetzung

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & \geq & 1 \\
-X_1 & + & X_2 & & & - & X_4 & \geq & -1 \\
-X_1 & + & & & X_3 & & & \geq & 0 \\
-X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & \geq & -1 \\
X_1 & & & - & X_3 & & & \geq & 0 \\
 & - & X_2 & & & & & \geq & 0
\end{array}$$

$0 \leq X_1, X_2, X_3, X_4 \leq 1$

Aus der letzten Ungleichung folgt sofort $X_2 = 0$. Aus der dritten und vorletzten Ungleichung folgt $X_1 = X_3$.
Eingesetzt in das Gleichungssystem ergibt sich:

$$\begin{array}{rcrcr}
2X_1 & & & \geq & 1 \\
-X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\
-2X_1 & + & X_4 & \geq & -1
\end{array} \qquad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Beispiel 2

$$\begin{array}{rcrcr}
2X_1 & & & \geq & 1 \\
-X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\
-2X_1 & + & X_4 & \geq & -1
\end{array} \qquad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $X_1 = 1$

Beispiel 2

$$\begin{array}{rcrcr}
2X_1 & & & \geq & 1 \\
-X_1 & - & X_4 & \geq & -1 \\
-2X_1 & + & X_4 & \geq & -1
\end{array} \qquad 0 \leq X_1, X_4 \leq 1$$

Aus der ersten Ungleichung folgt $X_1 = 1$
Eingesetzt in die beiden folgenden Ungleichungung ergibt sich

$$\begin{array}{rrcr}
- & X_4 & \geq & 0 \\
+ & X_4 & \geq & 1
\end{array} \qquad 0 \leq X_4 \leq 1$$

Dieses System ist sicherlich unerfüllbar.