Formale Systeme

Prof. Dr. Bernhard Beckert

Fakultät für Informatik
Universität Karlsruhe (TH)

Winter 2008/2009

Kalküle für die Aussagenlogik

Übersicht

1. Hilbert-Kalkül
2. Resolutionskalkül
3. Tableaukalkül
4. Sequenzenkalkül

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Wesentliche Eigenschaften

- Widerlegungskalkül: Testet auf Unerfüllbarkeit

$$M \models A \quad \Leftrightarrow \quad M \cup \{\neg A\} \vdash_{\mathbf{T0}} \mathbf{0}.$$

- Beweis durch Fallunterscheidung
- Top-down-Analyse der gegebenen Formeln

Der aussagenlogische Tableaukalkül

Vorteile

- Intuitiver als Resolution
- Formeln müssen nicht in Normalform sein
- Falls Formelmenge erfüllbar ist (Test schlägt fehl),
  wird ein Gegenbeispiel (eine erfüllende Interpretation) konstruiert

Nachteil

- Mehr als eine Regel

Kleine Deutsch- und Englischsstunde

Deutsch

das	Tableau	
des	Tableaus	(Gen.)
die	Tableaus	(pl.)
der	Tableaukalkül	(*nicht* das)

Englisch

the	tableau	(sing.)
the	tableaux	(pl.)
the	tableau calculus	

Vorzeichenformel

Definition (Vorzeichenformel)

Eine **Vorzeichenformel** ist eine Zeichenkette der Gestalt

$$0A \text{ oder } 1A \qquad \text{mit } A \in For0.$$

0, 1 sind neue Sonderzeichen (die Vorzeichen) im Alphabet der Objektsprache.

Definition

Wir setzen val_I fort auf die Menge aller Vorzeichenformeln durch

$$val_I(0A) = val_I(\neg A),$$

und

$$val_I(1A) = val_I(A).$$

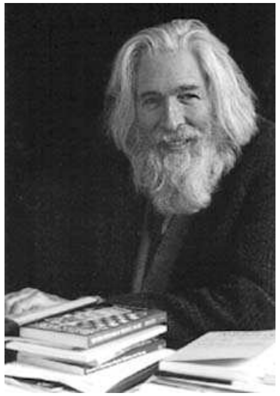
Uniforme Notation

Konjunktive Formeln: Typ α

- $1(A \wedge B)$
- $0(A \vee B)$
- $0(A \rightarrow B)$
- $0\neg A$
- $1\neg A$

Disjunktive Formeln: Typ β

- $0(A \wedge B)$
- $1(A \vee B)$
- $1(A \rightarrow B)$



Raymond Smullyan

Uniforme Notation

Zuordnungsregeln Formeln / Unterformeln

α	α_1	α_2
$1(A \wedge B)$	$1A$	$1B$
$0(A \vee B)$	$0A$	$0B$
$0(A \rightarrow B)$	$1A$	$0B$
$0\neg A$	$1A$	$1A$
$1\neg A$	$0A$	$0A$

β	β_1	β_2
$0(A \wedge B)$	$0A$	$0B$
$1(A \vee B)$	$1A$	$1B$
$1(A \rightarrow B)$	$0A$	$1B$

Regeln des (aussagenlogischen) Tableaukalküls

$\dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$ konjunktiv

$1(p \wedge q)$
$1p$
$1q$

$\dfrac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$ disjunktiv

$1(p \vee q)$
$1p \quad 1q$

$\dfrac{\begin{array}{c}1F\\0F\end{array}}{*}$ $\quad \dfrac{0\mathbf{1}}{*}$ $\quad \dfrac{1\mathbf{0}}{*}$ Widerspruch

$1F$, $0F$, $*$ $\quad$ $0\mathbf{1}$, $*$ $\quad$ $1\mathbf{0}$, $*$

Instanzen der α- und β-Regel

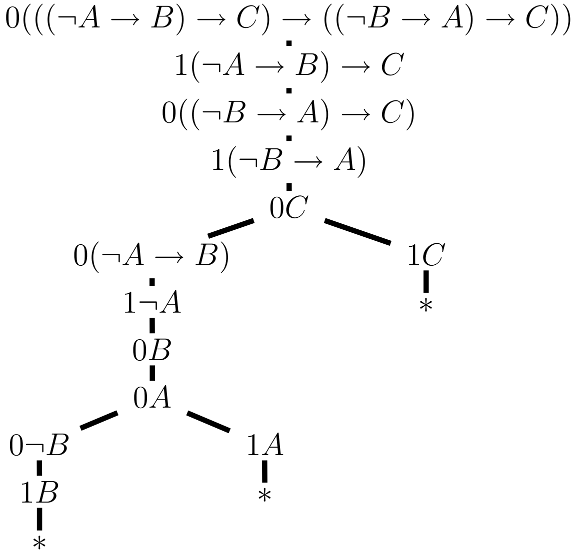
Instanzen der α-Regel

$\dfrac{1(P \wedge Q)}{\begin{array}{c}1P\\1Q\end{array}}$ $\quad \dfrac{0(P \vee Q)}{\begin{array}{c}0P\\0Q\end{array}}$ $\quad \dfrac{0(P \to Q)}{\begin{array}{c}1P\\0Q\end{array}}$ $\quad \dfrac{0\neg P}{1P}$ $\quad \dfrac{1\neg P}{0P}$

Instanzen der β-Regel

$\dfrac{1(P \vee Q)}{1P \mid 1Q}$ $\quad \dfrac{0(P \wedge Q)}{0P \mid 0Q}$ $\quad \dfrac{1(P \to Q)}{0P \mid 1Q}$

Beispiel: $\models (((\neg A \to B) \to C) \to ((\neg B \to A) \to C))$



Determinismus von Kalkül und Regeln

Determinismus

- Die Regeln sind alle deterministisch
- Der Kalkül aber nicht:
  Auswahl der nächsten Formel, auf die Regel angewendet wird

Heuristik

Nicht-verzweigende Regeln zuerst: „α vor β“

Nota bene

Selbe Formel kann mehrfach (auf verschiedenen Ästen) verwendet werden

Formale Definition des Kalküls

Definition: Tableau

Binärer Baum, dessen Knoten mit Formeln markiert sind

Definition: Tableauast

Maximaler Pfad in Einem Tableau (von Wurzel zu Blatt)

Formale Definition des Kalküls

Sei M eine Formelmenge, sei A eine Formel

Initialisierung

Das Tableau, das nur aus dem Knoten $0A$ besteht, ist ein Tableau für A über M (d.h., für $M \models A$)

Erweiterung

- T ein Tableau für A über M
- B ein Ast von T
- F eine Formel auf B, die kein Literal ist

T' entstehe durch Erweiterung von B gemäß der auf F anwendbaren Regel (α oder β)
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Formale Definition des Kalküls

Voraussetzungsregel

- T ein Tableau für A über M
- F eine Formel in M

T' entstehe durch Erweiterung eines beliebigen Astes durch $1F$
Dann ist T' ein Tableau für A über M

Formale Definition des Kalküls

Definition: Geschlossener Ast

Ast B eines Tableaus ist geschlossen, wenn

$$1F, 0F \quad \in \quad B \quad \text{oder} \quad 1\mathbf{0} \in B \quad \text{oder} \quad 0\mathbf{1} \in B$$

Definition: Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen, wenn jeder seiner Äste geschlossen ist

Definition: Tableaubeweis

Ein Tableau für A über M, das geschlossen ist,
ist ein Tableaubeweis für $M \cup \{\neg A\} \vdash_{T0} \mathbf{0}$ und damit für $M \models A$

Korrektheit und Vollständigkeit des Tableaukalküls

Theorem

Es gilt $M \models A$
genau dann, wenn
es einen Tableaubeweis für A über M gibt

Kern des Korrektheitsbeweises

Definition: Erfüllbares Tableau

Tableauast ist erfüllbar, wenn die Menge seiner Formeln erfüllbar ist
Tableau ist erfüllbar, wenn es (mindestens) einen erfüllbaren Ast hat

Lemma

Jedes Tableau für A über M ist erfüllbar,
falls $M \cup \{\neg A\}$ erfüllbar ist.

Lemma

Ein geschlossenes Tableau ist nicht erfüllbar

Also

Kein geschlossenes Tableau für A über M, falls $M \cup \{\neg A\}$ erfüllbar

Korrektheitslemma

Initialisierung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $0A$.

Voraussetzung: I ist Modell von $M \cup \{\neg A\}$, also von $1F$ für alle $F \in M$.

α-Fall:

- Nach Induktionsannahme erfüllt I einen Ast π in T.
- Zur Anwendung der α-Regel wird ein Ast π_1 in T und eine α-Formel α auf π_1 gewählt, π_1 wird verlängert um α_1, α_2.
- Wenn $\pi_1 \neq \pi$, ist π ein Ast in T', und damit (trivial) auch T' erfüllt.
- Wenn $\pi_1 = \pi$, haben wir aus $val_I(\pi) = W$, dass $val_I(\alpha) = W$, also $val_I(\alpha_1) = W$ und $val_I(\alpha_2) = W$.
- Somit $val_I(\pi') = W$ für den neu entstehenden Pfad π', d.h. T' ist erfüllbar

β-Fall: analog

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Definition: Voll expandiertes Tableau

Ein Tableau heißt voll expandiert, wenn

- jede Regel
- auf jede passende Formel
- auf jedem offenen Ast

angewendet worden ist und

- für jedes $F \in M$ (hierfür muss M endlich sein)
- für jeden Ast B

$1F$ auf B vorkommt

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Lemma

B ein offener Ast in einem voll expandiertem Tableau,
dann ist B erfüllbar

Also

Ist $M \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar
und also jeder Ast eines voll expandierten Tableaus für A über M unerfüllbar,
dann ist jedes voll expandierte Tableau für A über M geschlossen

Kern des Vollständigkeitsbeweises

Beweis

Sei B ein offener Ast eines voll expandierten Tableaus

Wir definieren

$$I(P) := \begin{cases} W & \text{falls } 1P \in B \\ F & \text{falls } 0P \in B \\ \text{bel.} & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch Induktion zeigt man leicht:
$I(F) = W$ für jedes F auf B.

Es folgt, dass I Modell von $M \cup \{\neg A\}$ ist.