Eigenschaften von Theorien

Definition. Eine Theorie $\mathcal{T}$ ist **(endlich) axiomatisierbar**, falls es eine (endliche) *entscheidbare* Menge Ψ geschlossener Formeln gibt (die Axiome), so daß:
ϕ ist $\mathcal{T}$-allgemeingültig gdw. $\Psi \models \phi$.

Eine Theorie $\mathcal{T}$ ist **vollständig**, falls für alle geschlossenen Formeln ϕ entweder ϕ oder $\neg\phi$ $\mathcal{T}$-allgemeingültig ist. ■

Nur axiomatisierbare Theorien können im weiteren behandelt werden.

Beispiel für eine Theorie die nicht axiomatisierbar ist: die Menge aller erfüllbaren Formeln.

Die Menge der $\mathcal{T}$-allgemeingültigen Formeln einer aximatisierbaren Theorie $\mathcal{T}$ ist aufzählbar – im allgemeinen sind aber unentscheidbar (Beispiel: leere Theorie).

Die Menge der $\mathcal{T}$-allgemeingültigen Formeln einer aximatisierbaren, vollständigen Theorie $\mathcal{T}$ ist entscheidbar.

Definition. Eine Theorie $\mathcal{T}$ ist **universell**, falls sie mit Hilfe einer Axiomenmenge axiomatisierbar ist, die in Skolem-Normalform sind. ■

Für universelle Theorien gilt folgende Variante des Herband-Theorems:

Satz. Eine Menge Φ von Formeln in SNF ist genau dann $\mathcal{T}$-unerfüllbar, wenn es eine endliche Menge von Grundinstanzen von Φ gibt, die $\mathcal{T}$-unerfüllbar ist. ■

Beispiel.
Die Theorie $\mathcal{T} = \{(\exists x)p(x)\}$ ist nicht universell.

Sei $\Phi = \{(\forall x)(\neg p(x))\}$.

Φ ist $\mathcal{T}$-unerfüllbar.

Die Menge *aller* Grundinstanzen von Φ ist $\mathcal{T}$-erfüllbar.

■

Eine nicht-universelle Theorie kann durch Skolemisieren universell gemacht werden.

Beispiel. Eine Erweiterung von $\mathcal{OP}$, die das Dichtheits-Axiom

$$(\forall x)(\forall y)((x < y) \to (\exists z)((x < z) \land (z < y)))$$

enthält, ist nicht universell.

Verwende statt dessen:

$$(\forall x)(\forall y)((x < y) \to ((x < f(x, y)) \land (f(x, y) < y)))$$

■

Grundbegriffe des Theorieschließens

Definition. Sei Φ eine endliche Menge von Formeln – der **Key**.

Eine endliche Menge $R = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$ von Formeln, die leer sein kann,
ist ein $\mathcal{T}$-Residuum von Φ, falls es eine (idempotente) Substitution σ gibt, so daß

– $R = R\sigma$,

– $\Phi\sigma \models^{\circ}_{\mathcal{T}} \rho_1 \vee \ldots \vee \rho_k$

Dann heißt das Paar $\langle \sigma, R \rangle$ $\mathcal{T}$-**Refuter** von Φ. ■

Beispiele für $\mathcal{E}$-Refuter

Key	$\mathcal{E}$-Refuter
$\{\neg(a \approx a)\}$	id
$\{\neg(x \approx a)\}$	$\{x \leftarrow a\}$
$\{(\forall x)(\neg(x \approx a))\}$	id
$\{p(a), \neg p(b)\}$	$\langle id \quad , \{\neg(a \approx b)\}\rangle$
$\{p(f(a), f(b)), f(x) \approx x\}$	$\langle\{x \leftarrow a\}, \{p(a, f(b))\}\rangle$ $\langle\{x \leftarrow b\}, \{p(f(a), b)\}\rangle$
$\{p(f(a), f(b)), (\forall x)(f(x) \approx x)\}$	$\langle id \quad , \{p(a, b)\}\rangle$

Definition. Eine Menge Φ von Formeln ist $\mathcal{T}$-**komplementär**, falls für alle $\mathcal{T}$-Interpretationen $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ und alle Variablenbelegungen ν gilt:

$\mathrm{val}_{I,\nu}(\Phi) = F$. ■

Beispiel. Die Menge $\{\neg(x \approx y)\}$ ist *nicht* $\mathcal{E}$-komplementär.

Die Menge $\{\neg(x \approx x)\}$ ist $\mathcal{E}$-komplementär. ■

Lemma. Eine Substitution σ und eine Menge $R = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$ von Formeln bilden einen Refuter $\langle \sigma, R \rangle$ für einen Key Φ gdw.

1. $R = R\sigma$;

2. $\Phi\sigma \cup \{\neg\rho_1, \dots, \neg\rho_k\}$ ist $\mathcal{T}$-komplementär.

■

Satz. Sei $\mathcal{T}$ universell, und gebe es unendlich viele Funktionssymbole jeder Stelligkeit, die nicht in $\mathcal{T}$ vorkommen.

Dann ist eine quantorenfreie Formel Φ $\mathcal{T}$-komplementär gdw. alle Grundinstanzen von Φ $\mathcal{T}$-unerfüllbar sind. ■

Beispiel. Sei $\mathcal{T} = \{p(t) \mid t$ ein Grundterm$\}$.

In ihr kommen alle Funktionssymbole vor
(obiges Theorem nicht anwendbar)

Die Formel $\neg p(x)$ ist *nicht* $\mathcal{T}$-komplementär.

Obwohl: Alle ihre Grundinstanzen sind $\mathcal{T}$-unerfüllbar.
■

Definition. Ein **Hintergrundbeweiser** für eine Theorie $\mathcal{T}$ ist (formal) eine partielle Funktion

$$\mathcal{R} : 2^{Form_\Sigma} \longrightarrow 2^{Subst_\Sigma \times 2^{Form_\Sigma}}$$

so daß für alle Keys Φ, für die $\mathcal{R}$ definiert ist, $\mathcal{R}(\Phi)$ eine Menge von $\mathcal{T}$-Refutern für Φ ist.

Ein Hintergrundbeweiser ist **total**, falls alle Residuen, die er liefert, leer sind; andernfalls ist er **partiell**. ■

Beispiel. Ein Hintergrundbeweiser $\mathcal{R}$ für die Theorie partieller Ordnungen ($\mathcal{PO}$):
$\mathcal{R}(\Phi)$ ist die kleinste Menge, so daß:

1. wenn $t < t'_1, t'_2 < t'' \in \Phi$ mit t'_1, t'_2 unifizierbar, dann $\langle \sigma, t\sigma < t''\sigma \rangle \in \mathcal{R}(\Phi)$, wobei σ ein mgu;

2. wenn $t_1 < t_2 \in \Phi$ mit t_1, t_2 unifizierbar, dann $\sigma \in \mathcal{R}(\Phi)$, wobei σ ein mgu

■

Hintergrundbeweiser können ggf. mit Regelschemata beschrieben werden:

$$\frac{\begin{array}{c} t < t'_1 \\ t'_2 < t'' \end{array}}{t\sigma < t''\sigma} \qquad\qquad \frac{t_1 < t_2}{*}$$

σ ein mgu von t'_1, t'_2 $\qquad$ σ ein mgu von t_1, t_2

Kombination mit Tableaus mit freien Variablen liefert einen vollständigen Kalkül für die Theorie $\mathcal{PO}$.

Theorieschließen in Grundterm-Tableaus

Zusätzliche zu α-, β-, γ-, δ-Regel und Standard-Abschluß-Regel der Grundterm-Tableaus
die folgenden Regeln:

$$\frac{\begin{array}{c}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_p\end{array}}{\rho_1 \mid \cdots \mid \rho_k}$$

wobei $\langle id, \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}\rangle$ $(k \geq 1)$ ein
Refuter für den Key $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ ist, und
$\rho_1, \ldots, \rho_k$ keine freien Variablen enthält.

$$\frac{\begin{array}{c}\phi_1\\ \vdots\\ \phi_p\end{array}}{*}$$

wobei id ein
Refuter für den
Key $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ ist.

Theorieschließen in Tableaus mit freien Variablen

Zusätzliche zu α-, β-, γ-, δ-Regel und Standard-Abschluß-Regel der Tableaus mit freien Variablen die folgenden Regeln:

$$\frac{\begin{array}{c}\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p\end{array}}{\rho_1 \mid \cdots \mid \rho_k}$$

wobei $\langle \sigma, \{\rho_1, \ldots, \rho_k\} \rangle$ $(k \geq 1)$ ein Refuter für den Key $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ ist, und σ auf das Tableau angewendet wird.

$$\frac{\begin{array}{c}\phi_1 \\ \vdots \\ \phi_p\end{array}}{*}$$

wobei σ ein Refuter für den Key $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ ist, und auf das Tableau angewendet wird.

Theorieschließen in Resolution

$$\frac{\begin{array}{c}\{\phi_1\} \cup C_1 \\ \vdots \\ \{\phi_p\} \cup C_p\end{array}}{R \cup (C_1 \cup \ldots \cup C_p)\sigma}$$

wobei $\langle \sigma, R \rangle$ ein Refuter
für den Key $\{\phi_1, \ldots, \phi_p\}$ ist

NB: Auch hier werden die Variablen in den Prämissen vor Anwendung der Regel umbenannt.

Korrektheit und Vollständigkeit von Theorieschließen

Korrektheit:

Folgt direkt aus der Definition nach der Hintergrundbeweiser nur korrekte Refuter liefern dürfen.

Vollständigkeit:

Zumindest dann gegeben, wenn:

– der Vordergrundbeweiser durch Fairneß alle möglichen Keys generiert und diese auch an den Hintergrundbeweiser gibt,

– der Hintergrundbeweiser *alle* möglichen Refuter liefert,

– der Vordergrundbeweiser die vom Hintergrundbeweiser gelieferten Refuter in fairer Weise alle verwendet.

Jedoch: Viel zu großer Suchraum, wenn alle möglichen Refuter verwendet werden.

Daher: Beschränkung auf „allgemeinste" Refuter.

Allgemeinste Refuter

Definition. Sei $\mathcal{T}$ eine Theorie, und sei W eine Menge von Variablen.

Die Subsumtionsrelationen $\leq^W$ und $\leq^W_\mathcal{T}$ auf Refutern sind definiert durch:

- $\langle \sigma, R \rangle \leq^W \langle \sigma', R' \rangle$,
  falls es eine Substitution τ gibt, so daß
  1. $\sigma'(x) = \sigma(x)\tau$ für alle $x \in W$, und
  2. $R'\tau \supset R$.

- $\langle \sigma, R \rangle \leq^W_\mathcal{T} \langle \sigma', R' \rangle$,
  falls es einen Refuter $\langle \sigma'', R'' \rangle$ gibt, so daß
  1. $\langle \sigma, R \rangle \leq^W \langle \sigma'', R'' \rangle$, und
  2. $\Phi\sigma'' \cup \{\bigvee R''\} \models^\circ_\mathcal{T} \Phi\sigma' \cup \{\bigvee R'\}$ für alle Formelmengen Φ (insbesondere auch für $\Phi = \emptyset$).

■

Die Menge W enthält die „relevanten“ Variablen (zumindest die in den Refutern vorkommenden).

– Tableaus: die im jeweiligen Tableau vorkommenden

– Resolution: die in den beteiligten Klauseln vorkommenden

Beispiel. Sei $\mathcal{T}$ die leere Theorie.

$\langle id, \{p(x)\}\rangle$ subsumiert $\langle \{x \leftarrow a\}, \{p(a)\}\rangle$
für alle Variablenmengen W;

$\langle id, \{p(x)\}\rangle$ subsumiert $\langle id, \{p(a)\}\rangle$
nur, falls $x \notin W$. ■

Beispiel. Sei $\mathcal{T}$ beliebig.

$\langle \sigma, \{\phi\}\rangle$ ist allgemeiner als $\langle \sigma, \{\phi, \psi\}\rangle$. ■

Beispiel. Sei $\mathcal{T}$ die Gleichheitstheorie $\mathcal{E} \cup \{a \approx b\}$.

Dann subsumieren sich
$\langle id, p(a)\rangle$ und $\langle id, p(b)\rangle$
bzw.
$\{x \leftarrow a\}$ und $\{x \leftarrow b\}$
gegenseitig bzgl. $\leq_{\mathcal{T}}$ ■

Proposition. Die Vollständigkeit des Gesamtkalküls bleibt erhalten, wenn nur bzgl. $\leq^W$ bzw. $\leq^W_{\mathcal{T}}$ minimaler Refuter verwendet werden. ■

$\leq^W_{\mathcal{T}}$ ist mächtiger als $\leq^W$ aber schwerer zu berechnen.