Beweis der Vollständigkeit geordneter Resolution mit Selektionsfunktion

Ab hier Aussagenlogik
Vollständigkeit für PL durch Lifting

Beweisverfahren: Saturierung

Wichtiges Beweisverfahren für geordnete Resolution (auch für andere Varianten)

- Betrachte eine bzgl. geordneter Resolution *saturierte* Klauselmenge S
- Gib eine Modellkonstruktion für S an, die immer funktioniert, wenn S nicht die leere Klausel enthält.
- Das Modell wird iterativ konstruiert, beginned mit dem leeren Modell (alles falsch).
- Mache zuerst die bzgl. der Ordnung kleineren Klauseln wahr.
- Welche Atome „wahr gemacht“ werden, wird durch die Ordnung gesteuert.
- Aber: Technisch aufwendiger Beweis dafür erforderlich, daß die konstruierte Interpretation tatsächlich Modell aller Klauseln ist.

Beispiel:

Ordnung: $\neg q > q > p > r$

Klauselmenge: $\{\neg q, p, r\} > \{q\} > \{p, r\}$

Mache zuerst das maximale Literal p in der Resolventen wahr,
dann das maximale Literal q in der noch unerfüllten Elternklausel.

Das maximale Literal $\neg q$ in der maximalen Klausel kann jetzt zwar nicht wahr gemacht werden, aber aus der Konstruktion folgt, daß eines der anderen Atome (hier p), das auch in der Resolventen vorkommt, schon wahr ist.

Nun formal ...

Saturierung

Definition. Sei $<$ zulässige Ordnung, S Klauselmenge.
Wir konstruieren Interpretationen

$$I_C = \bigcup_{D<C} E_D$$

wobei

1. $E_D = \{p\}$, falls
   - p $<$-maximal in D ist,
   - $I_D \not\models D$
   - $I_D \cup \{p\} \not\models D - \{\{p\}\}$

   (In diesem Fall heißt D **produktiv**.)

2. $E_D = \{\}$ sonst.

$I = \bigcup_{D \in S} E_D$ heißt
die von S **induzierte Interpretation**. ■

Lemma 1

Seien $C, D \in S$ Klauseln mit $C \leq D$.

Ist $\neg p \in C$ und $p \notin I_D$,
dann $p \notin I$.

Beweis: Wäre $p \in I$, müßte es, da $p \notin I_D$, von einer Klausel produziert werden, die bzgl. $<$ größer als D (und C) ist.

Daraus würde $p > \neg p$ folgen, was der Zulässigkeit von $<$ widerspricht. ■

Lemma 2

Seien $C, D \in S$ Klauseln mit $C \leq D$.

Gilt $I_D \models C$,
dann auch $I_{D'} \models C$ für alle $D' > D$,
und $I \models C$.

Beweis: Einfaches Korollar von Lemma 1. ■

Lemma 3

Sei S saturiert bzgl. geordneter Resolution mit Selektionsfunktion (incl. Faktorisierung)
und sei $\Box \notin S$. Dann gilt für alle $C \in S$:

Wird p von C produziert, dann $I \not\models C - \{\{p\}\}$

Beweis: Nach der Definition der Produktion gilt: $I_C \not\models C$ und also $I_C \not\models C' = C - \{\{p\}\}$.

Für beliebige (später wahr gemachte) $q \in I - I_C$ gilt:
$q \geq p > C'$ (da p maximal in C). Also kommen solche q in C' nicht vor,
und also $I \not\models C'$. ∎

Lemma 4

Sei S saturiert bzgl. geordneter Resolution mit Selektionsfunktion (incl. Faktorisierung)
und sei $\square \notin S$. Dann gilt für alle $C \in S$:

1. Wird p von C produziert, dann $f(C) = \emptyset$.

2. $I_C \cup E_C \models C$.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Sei C eine minimale Klausel, so daß die Behauptung *nicht* gilt.

Zu 1:

Nehmen wir an, die 1. Bedingung sei verletzt. Es gebe selektierte Literale: $f(C) = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$.

Es gilt $I_C \not\models \neg p_i$ (da $\neg p_i \in C$ und $I_C \not\models C$), also müssen die p_i von Klauseln $D_i = D'_i \cup \{\{p_i\}\} < C$ produziert worden sein, weshalb p_i maximal in D_i ist. Da C eine minimale Klausel ist, für die die Aussage des Lemmas nicht gilt, gilt sie für die D_i, also $f(D_i) = \emptyset$. Damit ist ein geordneter Resolutionschritt mit Selektionsfunktion möglich mit Resolvente $R = D'_1 \cup \cdots \cup D'_n \cup C''$, wobei $C'' = C - \{\{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}\}$.

Da S saturiert ist, gilt $R \in S$.

Aus $C > D_i$ folgt $C > D_i'$. Außerdem gilt trivialerweise $C > C''$; insgesamt also $C > R$.

Da C eine minimale Klausel ist, für die die Aussage des Lemmas nicht gilt, gilt sie für R, also $I_R \cup E_R \models R$. Und da $C > R$ folgt (Lemma 2): $I_C \models R$.

Aus Lemma 3 folgt, daß I und also I_C keines der D_i' erfüllt. (NB: man weiß nichts darüber, ob die D_i' in I_R erfüllt sind.)

Da I_C die D_i' nicht erfüllt, wohl aber R, folgt $I_C \models C''$ und also $I_C \models C$. Dies steht im Widerspruch zur Produktivität von C.

Zu 2: Nehmen wir an, die 2. Bedingung sei verletzt. Es gelte also $I_C \cup E_C \not\models C$.

Dann kann C nicht produktiv sein und muß daher eine der Bedingungen an produktive Klauseln verletzen. $I_C \not\models C$ ist gegeben, also ist entweder das maximale Literal in C negativ oder es gilt
$I_C \cup \{p\} \vDash C' = C - \{\{p\}\}$.

Behandeln wir zuerst den letzteren Fall; er kann nur eintreten (da $I_C \not\models C$), falls C' ein weiteres Auftauchen von p enthält: $C = C'' \cup \{\{p, p\}\}$. Da p maximal ist, und (wie in Fall 1) $f(C) = \emptyset$, ist durch Faktorisierung die kleinere Klausel C' ableitbar, für die ebenfalls $I_{C'} \cup E_{C'} \not\models C'$ gilt (denn daraus würde $I_C \models C'$ und also $I_C \models C$ folgen). Also gilt auch für C' die Aussage des Lemmas nicht, was der Minimalität von C widerspricht.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß das maximale Literal in C negativ ist. Dann folgt aus der Zulässigkeit der Ordnung $>$, daß $f(C) \neq \emptyset$, also $f(C) = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$. Genau wie im ersten Teil des Beweises folgt daraus ein Widerspruch (weil dann ein Resolutionsschritt möglich sein muß). ■

Satz. Eine bzgl. geordneter Resolution mit Selektionsfunktion und Faktorisierung saturierte Klauselmenge S ist unerfüllbar gdw sie die leere Klausel enthält. ■

Beweis: Enthält S die leere Klausel ist S trivialerweise unerfüllbar.

Umgekehrt enthalte S die leere Klausel nicht. Dann gilt nach Lemma 4: $I_C \cup E_C \models C$ für alle $C \in S$, woraus mit Lemma 2 $I \models C$ für alle $C \in S$ folgt; also gilt $I \models S$. ■

Bemerkung:

Geordnete Resolution mit Selektionsfunktion ist eine sehr starke Verfeinerung.

Die Vollständigkeit vieler anderer Verfeinerungen folgt daraus.

Beispiel:

Vollständigkeit der N-Resolution und (damit) der allgemeinen semantischen Resolution.

Satz. Sei die Ordnung $>$ beliebig, und selektiere f jeweils *alle* negativen Literale einer Klausel.

Dann ist jeder geordneter Resolutionsschritt mit Selektionsfunktion f und anschließender Faktorisierung ein N-Resolutionsschritt. ■

Beispiel.

$$
\begin{tikzcd}
\{\{\boxed{q}, s\}\} \arrow[dr] & \{\{\boxed{r}, p\}\} \arrow[d] & \{\{p, \overbrace{\neg q, \neg r}^{f}\}\} \arrow[dl] \\
& \{\{s, p, p\}\} \arrow[d] & s < p < r < q \\
& \{\{s, p\}\} &
\end{tikzcd}
$$

Vollständigkeit der (allgemeinen) semantischen Resolution

Die Vollständigkeit der (allgemeinen) semantischen Resolution kann aus der Vollständigkeit der N-Resolution gefolgert werden.

Definition. Sei S eine Grundklauselmenge über Σ, und sei I eine Σ-Herbrand-Interpretation.

Die von I **induzierte Umbenennung** σ_I ersetzt (simultan) Literale wie folgt: wenn $I \models p$ wird jedes Auftauchen des Literals p durch $\neg p$ und jedes Auftauchen des Literals $\neg p$ durch p ersetzt; andernfalls bleiben p und $\neg p$ unverändert. ■

Beispiel.

$$S = \{\{\neg p, q\}, \{p, q, \neg r\}, \{\neg s, t\}, \{\neg s, \neg t\}, \{r, p\}, \{\neg q, s\}\}$$

$$I = \{q\} \qquad \Sigma = \{p, q, r, s, t\}$$

$$\sigma_I(S) = \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, \neg q, \neg r\}, \{\neg s, t\}, \{\neg s, \neg t\}, \{r, p\}, \{q, s\}\}$$

Satz. Sei S eine Grundklauselmenge über Σ, und sei I eine beliebige Σ-Herbrand-Interpretation.

Ferner sei B ein N-Resolutionsbeweis für $\sigma_I(S)$.

Dann ist ${\sigma_I}^{-1}(B)$ ein semantischer Resolutionsbeweis für S bzgl. der Interpretation I. ■

Beweis: Einfache Überlegung basierend darauf, daß $I_N \models \sigma_I(p)$ gdw $I \models p$. ■

Gleichheit und andere Theorien

Theorieschließen ist eine wichtige Technik zur Steigerung der Effizienz.

Theorie $\approx$
durch Menge von Axiomen definierte spezielle Domäne

Der (allgemeine) Vordergrund-Beweiser benutzt einen speziellen Hintergrund-Beweiser, um Probleme aus der Theorie zu lösen.

Definition. Eine **Theorie** $\mathcal{T}$ ist eine erfüllbare Menge geschlossener Formeln. ∎

Beispiel.

Die Gleichheits-Theorie $\mathcal{E}$ besteht aus folgenden Axiomen:

(1) $(\forall x)(x \approx x)$ (Reflexivität),

(2) Für alle Funktionssymbole in Σ:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\\&\qquad((x_1 \approx y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \approx y_n) \to\\&\qquad\ f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(y_1, \ldots, y_n))\end{aligned}$$

(Montonie für Funktionssymbole),

(3) Für alle Prädikatensymbole in Σ:

$$\begin{aligned}&(\forall x_1)\cdots(\forall x_n)(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\\&\qquad((x_1 \approx y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \approx y_n) \to\\&\qquad\ (p(x_1, \ldots, x_n) \to p(y_1, \ldots, y_n)))\end{aligned}$$

(Montonie für Prädikatensymbole),

Symmetrie und Transitivität Folgen aus Reflexivität und Monotonie für Prädikatensymbole.

Beispiel.

Die Theorie $\mathcal{OP}$ der partiellen Ordnungen besteht aus den Axiomen

(1) $(\forall x)\neg(x < x)$ (Anti-Reflexivität),

(2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x < y) \land (y < z) \to (x < z))$ (Transitivität).

$\mathcal{OP}$ ist im Gegensatz zur Gleichheits-Theorie *endlich*.

Wichtige Klasse von Theorien sind die Erweiterungen der Gleichheits-Theorie:

Beispiel.

Die AC-Theorie für das Funktionssymbol f besteht (neben den $\mathcal{E}$-Axiomen) aus den zusätzlichen Axiomen

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(f(f(x,y),z) \approx f(x,f(y,z)))$$

und

$$(\forall x)(\forall y)(f(x,y) \approx f(y,x))$$

Die Defintionen von Interpretation, Erfüllbarkei, Tautologie etc. werden an das Theorieschließen angepaßt:

Definition. Sie $\mathcal{T}$ eine Theorie.

Eine $\mathcal{T}$-**interpretation** ist eine Interpretation, die alle Formeln in $\mathcal{T}$ erfüllt.

Eine Formel ϕ (eine Menge Φ von Formeln) ist $\mathcal{T}$-**erfüllbar**, wenn es eine $\mathcal{T}$-Interpretation gibt, die sie erfüllt. Andernfalls ist sie $\mathcal{T}$-unerfüllbar.

Eine geschlossene Formel ist $\mathcal{T}$-allgemeingültig, wenn sie von allen $\mathcal{T}$-interpretationen erfüllt wird.

Eine Formel ϕ ist eine logische $\mathcal{T}$-Konsequenz einer Menge Ψ von Formeln, in Zeichen $\Psi \models_{\mathcal{T}} \phi$, wenn ϕ von allen $\mathcal{T}$-Interpretationen erfüllt wird, die Ψ erfüllen.

■

Proposition. Gegeben eine Theorie $\mathcal{T}$, eine Menge Φ geschlossenere Formeln und eine geschlossene Formeln ψ; dann sind die Folgenden Aussagen äquivalent:

– $\Phi \models_{\mathcal{T}} \psi$.

– $\Phi \cup \mathcal{T} \models \psi$.

– $\Phi \cup \mathcal{T} \cup \{\neg\psi\}$ ist unerfüllbar.

– $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ ist $\mathcal{T}$-unerfüllbar.

■