Input-Resolution

Definition. Eine **Input-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, in der jede Resolvente mindestens eine Eingabeklausel als Elternklausel hat. ■

Input-Resolution ist lineare Resolution ohne Ancestor-Resolutionsschritte.

Input-Resolution ist unvollständig.

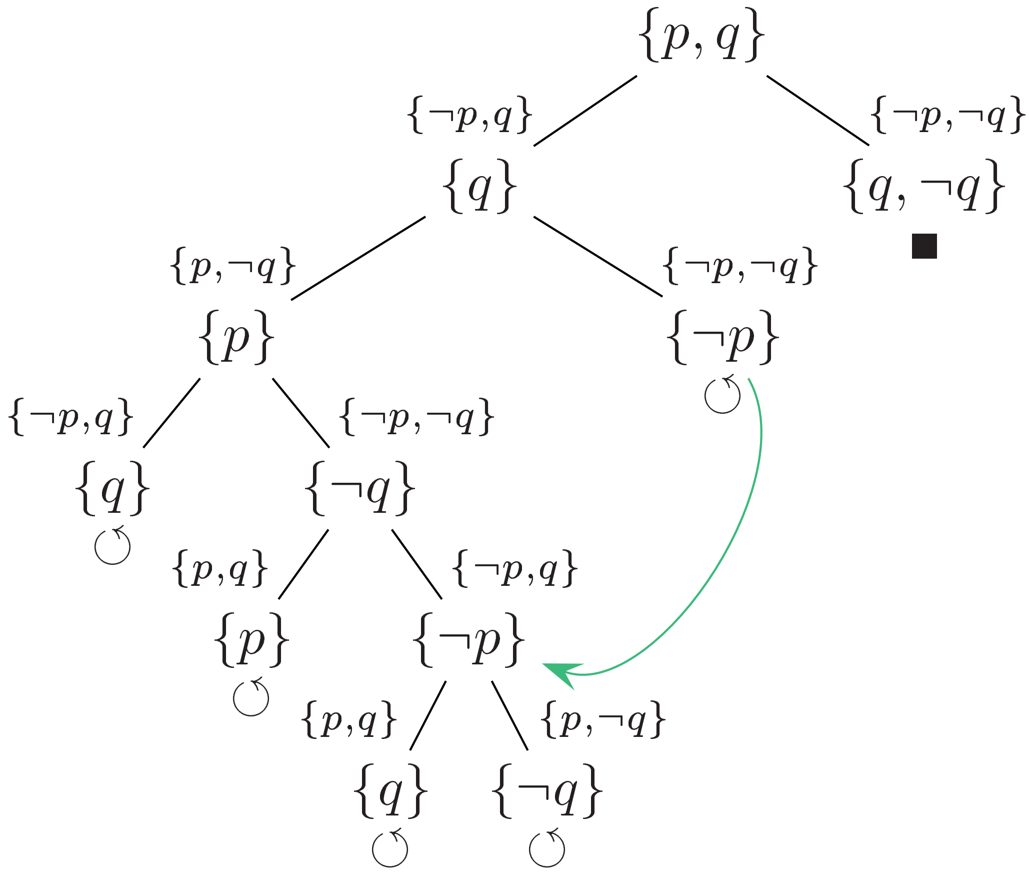
Jedoch:

Satz. Sei S unerfüllbare Menge von *Horn*klauseln. Dann gibt es eine Input-Resolutionsableitung von $\square$ aus S. ■

Beweis später.

Beispiel zur Unvollständigkeit:

$$C_2 = \{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, \neg q\}\}.$$



Einfachere Überlegung:

In S haben alle Eingabeklauseln Länge 2.
Jede Verbindungsklausel hat mindestens Länge 1
Also hat auch jede Resolvente mindestens Länge 1.

Unit-Resolution

Definition. Ein **Unit-Resolutionsschritt** ist ein Resolutionsschritt, bei dem mindestens eine der Elternklauseln (bzw. deren zur Resolution verwendeter Faktor) eine Einerklausel ist.

Eine **Unit-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Resolutionsschritt ein Unit-Resolutionsschritt ist. ■

Erfüllbarkeitskomplexität von AL Hornformeln

Satz. Dowling & Gallier (1984); Gallo & Urbani (1989)

Der Aufwand für den Erfüllbarkeitstest einer Menge S von AL Hornformeln ist in $\mathcal{O}(|S|)$. ■

Schreibweise für Hornklauseln.

Negative Hornklauseln: $\Box \leftarrow p_1 \dots, p_n$

Positive Hornklauseln (Fakten): $p \leftarrow \top$

Gemischte Hornklauseln (Regeln): $p \leftarrow p_1 \dots, p_n$

Für alle Hornklauseln $C = p \leftarrow p_1, \dots, p_n$:
Head$(C) = p$ Body$(C) = \{p_1, \dots, p_n\}$

Definition. Zu AL Hornformel $S = \{C_1, \dots, C_m\}$ ist gerichteter, markierter Graph $G_S = \langle N, E \rangle$, der **Erfüllbarkeitsgraph** von S, definiert:

$$N = \Sigma_S \cup \{\top, \Box\}$$

$$E = \{\langle p, q, C \rangle \mid p, q \in N, \text{ es gibt } C \in S, \text{ so daß } q = \text{Head}(C),\ p \in \text{Body}(C)\}$$ ■

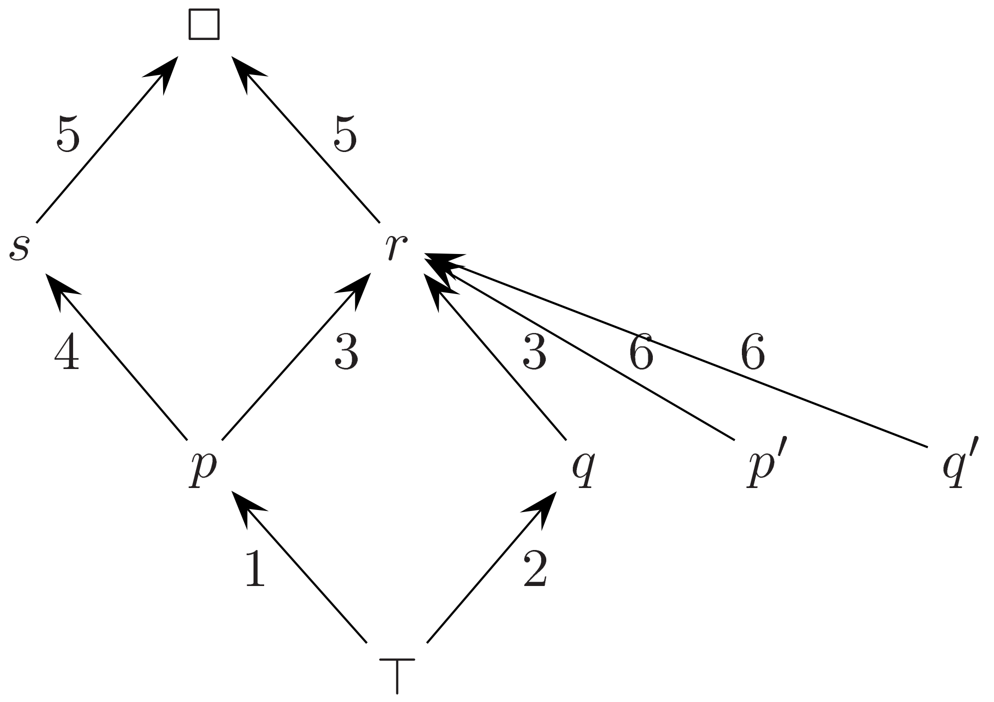
$\langle p, q, C \rangle$: Kante von p nach q mit Markierung C

Beispiel.

$$S = \{p \xleftarrow{1} \top \mid q \xleftarrow{2} \top \mid r \xleftarrow{3} p, q \mid s \xleftarrow{4} p \mid$$
$$\Box \xleftarrow[5]{} s, r \mid r \xleftarrow[6]{} p', q'\}$$

G_S :

$N = \{p, q, r, s, p', q', \Box, \top\}$



Definition. Tiefe d eines Knotens p in G_S ist $d(\top) = 0$ und für $p \neq \top$:

$$d(p) = 1 + \min\{d_0(p, C) \mid \text{ es gibt } \langle p', p, C\rangle \in E\}$$

Festlegung: $\min\{\} = \omega$

$$d_0(p, C) = \max\{d(p') \mid \langle p', p, C\rangle \in E\}$$

p heißt **erreichbar**, falls $d(p) < \omega$. ■

Im Beispiel:

$d(r)$ in G_S.

$$d(r) = 1 + \min\{d_0(r, 3),\ d_0(r, 6)\}$$

$$d_0(r, 3) = \max\{d(p),\ d(q)\}$$
$$d_0(r, 6) = \max\{d(p'),\ d(q')\}$$

$$d(p) = 1 + d_0(p, 1) = 1 + d(\top) = 1$$
$$d(q) = 1 + d_0(q, 2) = 1 + d(\top) = 1$$
$$d_0(r, 3) = 1$$

$$d(p') = 1 + \omega = \omega$$
$$d_0(r, 6) = \omega$$

$$d(r) = 1 + \min\{1, \omega\} = 2$$

Satz. Wenn p erreichbar ist, dann $S \models p$. ■

Beweis: Einfach (Induktion über $d(p)$).

Korollar. S ist unerfüllbar gdw $\square$ erreichbar. ■

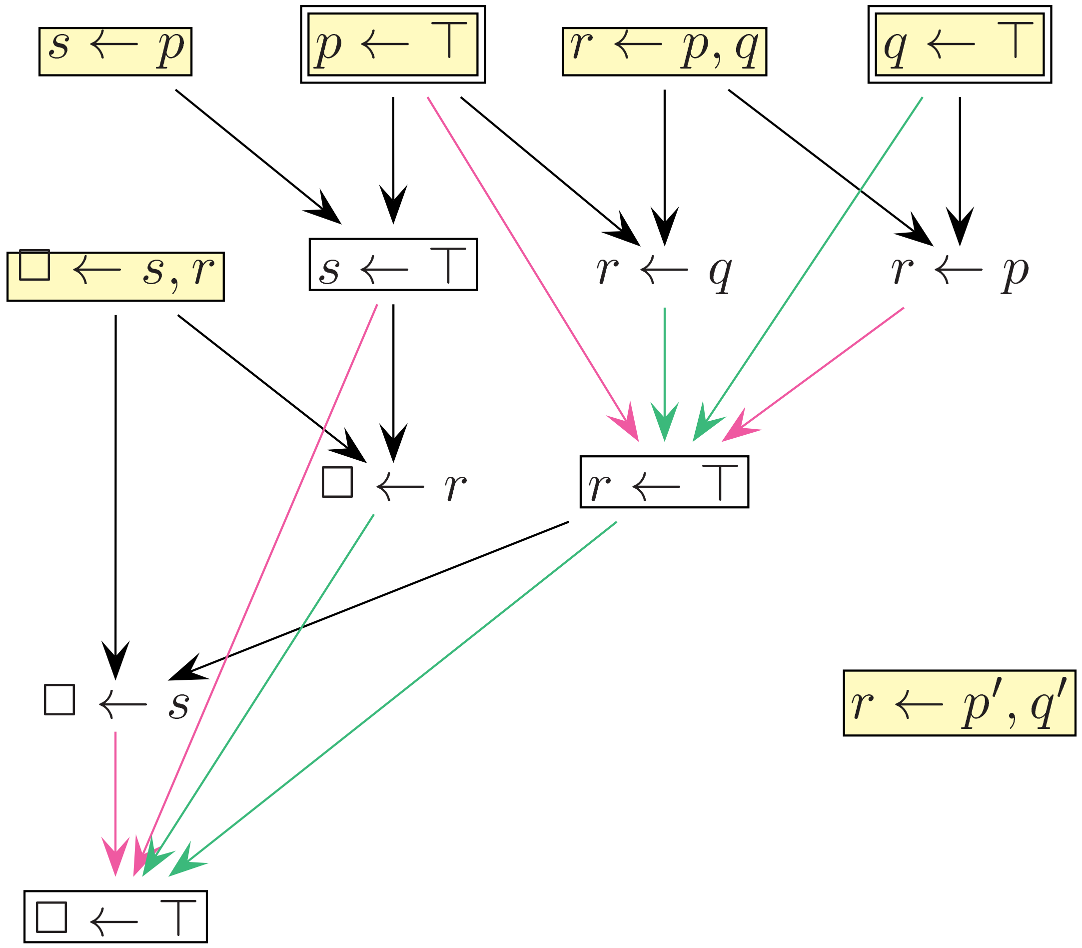
G_S kann in $\mathcal{O}(|S|)$ Schritten konstruiert werden.

Erreichbarkeit eines Knotens in G_S kann mit einem *Bottom-Up* Markierungsalgorithmus in linearer Zeit festgestellt werden.

Unit-Resolution entspricht einem Bottom-Up Markierungsalgorithmus für Knoten in G_S.

Unit-Resolution mit entsprechenden Datenstrukturen testet AL in linearer Zeit auf Erfüllbarkeit.

Unit-Resolutionsableitung in DAG-Notation



Input-Klauseln

Knoten des Graphen

Unit-Resolution ist Verfeinerung im engeren Sinn.

Input-Resolution nicht.

Jedoch:

Satz. Für PL Klauselmengen S gilt: $\Box$ ist aus S mit Unit-Resolution ableitbar gdw $\Box$ ist aus S mit Input-Resolution ableitbar. ■

Beweis. (Chang & Lee, 1973, S. 134f)

Unit-Resolution kann als Heuristik zur Verbesserung einer vollständigen Varianten von Resolution verwendet werden.

Vor jedem unbeschränkten Resolutionsschritt i-ter Tiefe berechne Unit-Resolventen, die mit k Schritten abgeleitet werden können.

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{R}^0_{RU}(S) & = & S \\
\mathcal{R}^{i+1}_{RU}(S) & = & D_{\text{sub}}(\mathcal{R}^i_{RU}(S) \cup \\
 & & \qquad \mathcal{R}_{RF}(\underbrace{\mathcal{R}_U(\cdots \mathcal{R}_U}_{k \text{ mal}}(\mathcal{R}^i_{RU}(S)))) \\
\mathcal{R}^*_{RU}(S) & = & \bigcup_{i<\infty} \mathcal{R}^i_{RU}(S)
\end{array}
$$

Liefert oftmals bessere Ergebnisse als $\mathcal{R}^*_{RF}$

Potentieller Effekt:

Unit-Resolutionsschritte finden früher statt als in $\mathcal{R}^*_{RF}$, daher kürzere Klauseln zuerst erzeugt und Subsumtion wahrscheinlicher.

$\mathcal{R}_{RU}$ heißt **Unit-Preference Strategie**

SLD-Resolution

Definition. Ein **N/P-Resolutionsschritt** ist ein Resolutionsschritt, bei dem mindestens eine Elternklausel negativ/positiv ist.

Eine **N/P-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Resolutionsschritt ein N/P-Resolutionsschritt ist. ■

Für Hornformeln:

Jede Resolutionsableitung mit negativer Startklausel ist sowohl N- als auch Input-Resolutionsableitung, in der nur definite (nicht negative) Klauseln als Eingabeklauseln vorkommen.

Für Input-Resolution ist t-Linearität nicht definiert, SL-Bedingung schon.

Definition. Eine **SLD-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, die gleichzeitig N-, Input- und SL-Resolutionsableitung ist. ■

SLD-Resolution: SL-Resolution für definite Klauseln.

Also: Ableitung aus Hornklauseln mit negativer Startklausel und SL-Auswahlfunktion

Operationale Semantik von Prolog-Programmen oft als SLD-Resolution bezeichnet.

Man meint aber Prolog-SLD-Resolution, auch LUSH-Resolution genannt.

Definition. Eine **Prolog-SLD-Resolutionsableitung** ist eine Ableitung,

- die N-Resolutionsableitung ist,
- die Input-Resolutionsableitung ist,
- bei der resolvierten Literale durch eine allgemeine Auswahlfunktion auf Klauseln bestimmt sind,
- Klauseln Vielfachmengen sind.

■

Die Standard-Prolog-Auswahlfunktion wählt das am weitesten links stehendes Literal aus.

Die laxe Bezeichnung ist vetretbar, weil die SL-Bedingung automatisch erfüllt ist, falls neue Literale zur Bildung der Resolvente links angehängt werden.

Satz. Sei S eine unerfüllbare AL Hornformel. Dann gibt es eine Prolog-SLD-Resolutionsableitung von $\square$ aus S. ■

Korollar. SLD-, Input- und N-Resolution sind widerlegungsvollständig für AL Hornformeln. ■

Beweisskizze:

Induktion über Anzahl n der Literale in S.

$n = 2$: $S = \{\{\{p\}\}, \{\{\neg p\}\}\}$. Klar.

$n > 2$: S o.B.d.A. mu. Jede unerfüllbare AL Hornformel enthält positive Einerklausel $\{\{p\}\}$ (alle positiven Hornklauseln sind Einerklauseln und eine Menge ohne positive Klauseln ist erfüllbar).

Falls $\{\neg p\} \in S$, fertig. Sonst entstehe S^d aus S, indem jedes Auftauchen von $\neg p$ in S gelöscht wird.

Da $\{\neg p\} \notin S$ ist $\Box \notin S^d$; außerdem ist S^d unerfüllbar.

$\neg p$ taucht in S auf, sonst $S - \{\{p\}\}$ unerfüllbar und S nicht mu. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Prolog-SLD-Resolutionsableitung von $\Box$ aus S^d.

Setze in diese Ableitung $\neg p$ wieder ein. Dadurch endet die Ableitung nicht mehr mit $\Box$, sondern mit $\{\neg p\} = \{\{\neg p, \ldots, \neg p\}\}$. Wiederholte Resolution mit $\{\{p\}\} \in S$ ergibt Prolog-SLD-Resolutionsableitung von $\Box$ aus S.

$\blacksquare$

Makro-Resolutionsschritte

Semantische Resolution

S unerfüllbare AL Klauselmenge, I *beliebige* AL Interpretation.

Beispiel.

$$S = \{\{\neg p, q\}, \{p, q, \neg r\}, \{\neg s, t\}, \\ \{\neg s, \neg t\}, \{r, p\}, \{\neg q, s\}\}$$

$I = \{q\}$ $\qquad\qquad$ $\Sigma = \{p, q, r, s, t\}$

Es ist stets möglich, Klauseln C, $D \in S$ zu finden, so daß:

- $I \not\models C \qquad\qquad I \models D$
- C und D AL resolvierbar.

$C = \{\neg q, s\}$, $D = \{\neg s, t\}$ resolvieren zu $\{\neg q, t\}$.

Beobachtung: $I \not\models \{\neg q, t\}$.

Dies braucht nach einzelnem Resolutionsschritt i.a. nicht zu gelten.
Läßt sich aber durch mehrere geeignete Schritte immer erreichen

Definition. Ein **Clash** ist eine Menge von Klauseln $\{E_1, \ldots, E_q, C\}$ mit $|C| \geq q > 0$, so daß

1. $L_1, \ldots, L_q \in C$;
2. Für alle $1 \leq i \leq q$ gilt $\overline{L_i} \in E_i$
3. Für alle $1 \leq i, j \leq q$ gilt $(C - \{L_i\}) \cup E_i$ und $E_i \cup E_j$ nicht tautologisch

C heißt **Kern** (engl.: *nucleus*) des Clashs,
die E_i heißen **Elektronen**. ■

Definition. Sei $T = \{E_1, \ldots, E_q, C\}$ eine AL (PL) Klauselmenge. Falls eine AL (PL) lineare Resolutionsableitung $\langle C, E_1, D_1, \ldots, E_q, D_q \rangle$ mit q Schritten (und mgus $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$) existiert, so daß T $(T\sigma_1 \cdots \sigma_q)$ ein Clash ist, dann heißt D_q **Clash-Resolvente** von T. ■

Beispiele.

	E_1	E_2	C	Clash	Res.
T_1	$\{\{r, \boxed{p}\},$	$\{\boxed{\neg q}, s\},$	$\{\boxed{\neg p}, \boxed{q}\}\}$	$\times$	$\{r, s\}$
T_2	$\{\{\boxed{r}, p\},$	$\{\boxed{\neg q}, s\},$	$\{p, \boxed{q}, \boxed{\neg r}\}\}$	$\times$	$\{p, s\}$
T_3	$\{\{\boxed{\neg p}, q\},$	$\{\boxed{\neg q}, s\},$	$\{\boxed{p}, \boxed{q}, \neg r\}\}$	$-$	

Zu T_3:
Es gibt keine andere Möglichkeit die resolvierten Literale zu wählen. Nun gilt aber $E_1 \cup E_2$ ist tautologisch.

Herbrand-Interpretationen I: Teilmengen von At^0_Σ
Entsprechen Zweig eines semantischen Baums über Σ

Definition. PL Klausel C **schlägt fehl** in Herbrand-Interpretation I falls es Grundsubstitution σ gibt, so daß *aussagenlogisch* $I\sigma \not\models C$. ■

Definition. $T = \{E_1, \dots, E_q, C\}$ Klauselmenge mit Clash-Resolvente D. I Interpretation von T, so daß $\{E_1, \dots, E_q\}$ in I fehlschlagen. Dann ist T ein I-**Clash** und D eine I-**Clash-Resolvente**. Falls D in I fehlschlägt, ist T **maximaler** I-**Clash**. ■

Im Beispiel:

Mit $I = \{q\}$ sind T_1, T_2 I-Clashs.

Beide sind sogar maximal,
da $\{q\} \not\models \{r, s\}$, $\{q\} \not\models \{p, s\}$.

Bei I-Clash-Resolution ist I Modell des Kerns C.

Jede Resolvente eines maximalen I-Clash-Resolutionsschritts kann als Elektron verwendet werden.

Definition. Eine I-**Clash-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Resolutionsschritt ein I-Clash-Resolutionsschritt ist. ■

Satz. Ist S unerfüllbare Menge PL Klauseln, so ist $\square$ aus S mit I-Clash-Resolution für beliebige Herbrand-Interpretationen I ableitbar. ■

Beweisskizze: Satz von Herbrand – Grundvollständigkeit – Lifting ■

Beispiel.

$S = \{\boxed{\{p, q, \neg r\},\ \{\neg q, s\},\ \{r, p\}}, \{\neg p, q\}, \{\neg s, t\},$
$\{\neg s, \neg t\}\}$

$I = \{q\}$ $\Sigma = \{p, q, r, s, t\}$

$\boxed{T_2}$ aus vorhergehenden Beispiel war maximaler I-Clash mit Resolvente $\{p, s\}$.

Es gibt in S keine weiteren Elektronen, daher neue Resolvente verwenden:

Maximaler I-Clash in $S \cup \{\{p, s\}\}$:

$\{\{\boxed{\neg p}, \boxed{q}\},\ \{\boxed{p}, s\},\ \{\boxed{\neg q}, s\}$

mit Resolvente $\{s\}$.

Maximaler I-Clash in $S \cup \{\{p, s\}, \{s\}\}$:

$\{\{\boxed{\neg s}, t\},\ \{\boxed{s}\}\}$

mit Resolvente $\{t\}$.

Maximaler I-Clash in $S \cup \{\{p, s\}, \{s\},\ \{t\}\}$:

$\{\{\boxed{\neg s}, \boxed{\neg t}\},\ \{\boxed{s}\},\ \{\boxed{t}\}\}$

mit Resolvente $\Box$.

UR-Resolution

Definition. Ein **UR-Resolutionsschritt** ist ein maximaler Clash-Resolutionsschritt, bei dem die Resolvente entweder eine Einerklausel oder die leere Klausel ist.

Eine **UR-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Resolutionsschritt ein UR-Resolutionsschritt ist. ■

UR-Resolution nicht vollständig für allgemeine Klauselmengen

Jedoch: Vollständig für Hornformeln

Vorteil gegenüber der Unit-Resolution:
„Makro-Schritt“

- Reihenfolge der Unit-Resolutionsschritte, aus denen sich der Clash-Resolutionsschritt zusammensetzt, ist irrelevant.

  Verhindert Resolutionsableitungen, die sich nur hinsichtlich dieser Reihenfolge unterscheiden.

- Zwischenergebnisse können keine zusätzlichen Resolventen erzeugen.

Beispiel:

$$S = \{C_1 : \{\neg p(x,y), \neg p(y,z), p(x,z)\},$$
$$C_2 : \{p(a,b)\},$$
$$C_3 : \{p(b,c)\}\}$$

C_1 Transitivität des Prädikats p
— häufig Teil einer Axiomatisierung.

Mit unbeschränkter Resolution die Resolventen:

$\{\neg p(b,z), p(a,z)\}$ (aus C_1 und C_2) und

$\{\neg p(x,b), p(x,c)\}$ (aus C_1 und C_3)

Beide resolvieren mit C_2 bzw. C_1 zu $\{p(a,c)\}$.

Bei UR-Resolution mit $I \equiv F$ letzteres einzig mögliche Resolvente.

Irrelevante Zwischenergebnisse nicht erzeugt.

$I_F \equiv F$ wichtiger Spezialfall, falls Unit-Einschränkung weggelassen.

Hyper-Resolution

I_W Herbrand-Interpretation für S mit $I_W \equiv W$

I_F Herbrand-Interpretation für S mit $I_F \equiv F$

In maximalem I_F-Clash $\{E_1, \ldots, E_q, C\}$:

- alle E_i positive Klauseln
- negative Literale von C genau die resolvierten Literale $\{L_1, \ldots, L_q\}$
- Resolvente D positive Klausel

Hyper-Resolution ist spezielle semantische Resolution.

Definition. Positiver/negativer **Hyper-Resolutionsschritt** ist maximaler I_F/I_W-Clash-Resolutionsschritt.

Eine positive/negative **Hyper-Resolutionsableitung** ist eine Resolutionsableitung, in der jeder Schritt ein positiver/negativer Hyper-Resolutionsschritt ist. ■

Vollständigkeit aus semantischer Resolution.

Hyper-Resolution inkompatibel mit linearer Resolution.

Hyper-Resolution läßt sich auch als Einschränkung von P- bzw. N-Resolution deuten.

Beispiel für Inkompatibilität.

$S = \{\{p\}, \{\neg p, q\}, \{\neg q, \neg r\}, \{r, \neg p\}\}$

$\{p\}$ Elektron in erstem Schritt, da einzige positive Klausel.

Entweder $\Gamma_1 = \langle \{p\}, \{\neg p, q\}, \{q\} \rangle$
oder $\Gamma_2 = \langle \{p\}, \{r, \neg p\}, \{r\} \rangle$

als Anfang.

Beides läßt sich nicht linear fortsetzen, da nur mit $\{\neg q, \neg r\}$ resolviert werden kann, was negatives Literal einführt.

Dagegen ist $\langle \Gamma_1, \Gamma_2, \{\neg q, \neg r\}, \Box \rangle$
Hyper-Resolutionsableitung.

Stützmengenstrategie

engl.: *set-of-support* (SOS)

Schwache Konnektionstableaus:
beweiskonfluente Approximation von KT

Gesucht:
beweiskonfluente Approximation linearer Resolution

Idee:
Nicht beide Elternklauseln sollten aus derselben erfüllbaren Teilmenge der abgeleiteten Klauseln sein

Definition. Sei S eine unerfüllbare Klauselmenge und S' eine erfüllbare Teilmenge von S.

Dann heißt $T = S - S'$ **Stützmenge** (SOS) von S. ■

Resolution mit SOS-Strategie ist wie folgt definiert.

Sei T Stützmenge einer Klauselmenge S.

$\mathcal{R}^0_{\mathsf{SOS}}(S) = S$

$SOS^0(S) = T$

$$\mathcal{R}^{i+1}_{\mathsf{SOS}}(S) = \mathcal{R}^i_{\mathsf{SOS}}(S) \cup \{C \in \mathcal{R}(\mathcal{R}^i_{\mathsf{SOS}}(S)) \mid \text{ mind. eine Elternklausel in } SOS^i(S)\}$$

$SOS^{i+1}(S) = SOS^i(S) \cup (\mathcal{R}^{i+1}_{\mathsf{SOS}}(S) - \mathcal{R}^i_{\mathsf{SOS}}(S))$

$\mathcal{R}^*_{\mathsf{SOS}}(S) = \bigcup \mathcal{R}^i_{\mathsf{SOS}}(S)$

Falls man eine Behauptung der Form

$(\bigwedge \mathsf{Ax}_i) \to \mathsf{Thm}$

hat, wobei ein Theorem aus einer Menge von Axiomen folgt, wird S von der Gestalt

$\{\mathsf{Ax}_1, \ldots, \mathsf{Ax}_n, \neg\mathsf{Thm}\}$

sein. Dann sollten die Klauseln der SNF von „$\neg$Thm“ in der Stützmenge sein (wenn die Menge der Axiome nicht schon unerfüllbar ist).

Oft kennt man keine minimal unerfüllbare Teilmenge. Dann ist SOS-Strategie unverzichtbar, weil dadurch eine gewisse Auswahl der verwendbaren Axiome stattfindet.

Implementierung von SOS

Teile S in zwei Listen von Klauseln auf:

T: Klauseln, die aktuell Support haben

U: übrige (*usable*) Klauseln

Pro Schleifendurchlauf:

Berechne Resolventen einer Klausel C ∈ T mit Support und allen übrigen Klauseln U ∪ T.

C wandert dadurch von T nach U:
Mehrfache Berechnung von Resolventen verhindert

```
/* S unerfüllbar, S - SOS erfüllbar */
U := S - SOS; % benutzbare Klauseln
T := SOS;     % aktuelle Stützmenge
while □ ∉ R and T ≠ ∅ do begin
  C := select_clause(T); % fair
  T := delete(C,T);
  U := append(U,[C]);
  R := {E | E Resolvente von C und D ∈ U ∪ T
            E ∉ U ∪ T};
  deletion_strategy(R,U,T);
  T := append(T,R)
end;
```

Satz. Sei S eine unerfüllbare PL Klauselmenge mit Stützmenge T.

Dann gilt $\Box \in \mathcal{R}^*_{\mathsf{SOS}}(S)$. ■

Beweis:

1. Weg: Sei $C \in T$ und S' mu Teilmenge von S, so daß $S' \supseteq ((S - T) \cup \{C\})$ (existiert, da $S - T$ erfüllbar).

Es gilt $S' \vdash_{RL} \Box$ mit Startklausel $C \in T$. Jede lineare Ableitung muß SOS-Ableitung sein, da jede Verbindungsklausel Support hat.

2. Weg: I beliebiges Modell von $S - T$. Es gibt minimale I-Clash-Resolutionsableitung von $\Box$ aus S.

Für jeden Resolutionsschritt gilt also, daß das Elektron in I fehlschlägt und daher nicht in $S - T$ sein kann. Also hat jede Resolvente Support. ■

SOS-Verfeinerung und damit semantische und lineare Resolution überhaupt ist inkompatibel mit Lockresolution.

Beispiel:

$$S = \{\{\overset{1}{p}\}, \{\overset{2}{\neg p}, \overset{3}{\neg q}\}, \{\overset{4}{q}\}\}$$

$$T = \{\{\overset{4}{q}\}\}$$

Kein kombinierter Lockresolutions-/SOS-Schritt möglich.

Semantische Resolution ist jedoch kompatibel mit den Löschregeln.

Geordnete Resolution mit Selektionsfunktion

Klauseln wieder Vielfachmengen von Literalen.

Definition. Eine **zulässige Ordnung** ist eine wohlfundierte und totale Ordnung auf At_Σ, so daß $\neg p > p$ für alle p. ■

Eine zulässige Ordnung $<$ wird auf Vielfachmengen wie folgt erweitert:

Seien $L_1 > \cdots > L_n$ und $L'_1 > \cdots > L'_m$ die Literale von Klauseln C, D.
Dann gilt $C < D$ gdw $L_1 \cdots L_n$ vor $L'_1 \cdots L'_m$ liegt in der von $<$ induzierten lexikographischen Ordnung.

Definition. Eine **Selektionsfunktion** f weist jeder Klausel eine (evtl. leere) Teilmenge ihrer *negativen* Literale zu,
wobei $f(C) \neq \emptyset$, falls das $<$-maximale Literal von C negativ ist. ■

Definition. Sei $<$ eine zulässige Ordnung, f eine Selektionsfunktion, und
$C_1 = C_1' \cup \{\{p_1\}\}, \ldots, C_n = C_n' \cup \{\{p_n\}\}$,
$D = D' \cup \{\{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}\}$.

Dann heißt
$E = C_1' \cup \cdots \cup C_n' \cup D'$
geordnete Resolvente mit Selektionsfunktion
von $C_1, \ldots, C_n$ und D, falls

– $f(D) = \{\neg p_1, \ldots, \neg p_n\}$

– $f(C_1) = \cdots = f(C_n) = \emptyset$

– p_i $<$-maximal in C_i für alle i

Sei $D = D' \cup \{\{p, \ldots, p\}\}$.

Dann heißt D' ein **geordneter Faktor** von D, falls

– p $<$-maximal in D

– $f(D) = \emptyset$

■