Vollständigkeit der Löschregeln

Semantische Bäume für PL mit „integriertem Lifting“.

Genau wie semantische Bäume in AL definiert, wobei Markierungen Teilmenge von At^0_Σ für PL Klauselmenge S über Signatur Σ.

Definition. PL Klausel C **schlägt fehl** bei ν falls es Grundsubstitution σ gibt, so daß für alle Literale $L \in C\sigma$ die Markierung $\overline{L}$ in Widerlegungsmenge von ν auftaucht. ∎

Lemma. Ist PL Klauselmenge S über Σ unerfüllbar, dann gibt es endliche Menge $K \subset \mathrm{At}^0_\Sigma$, so daß jeder semantische Baum über K geschlossen für S. ■

Beweis:

Wie im AL Fall: jeder semantische Baum ST über $\mathrm{At}^0_\Sigma = \langle p_1, p_2, \ldots \rangle$ geschlossen für S (Übung).

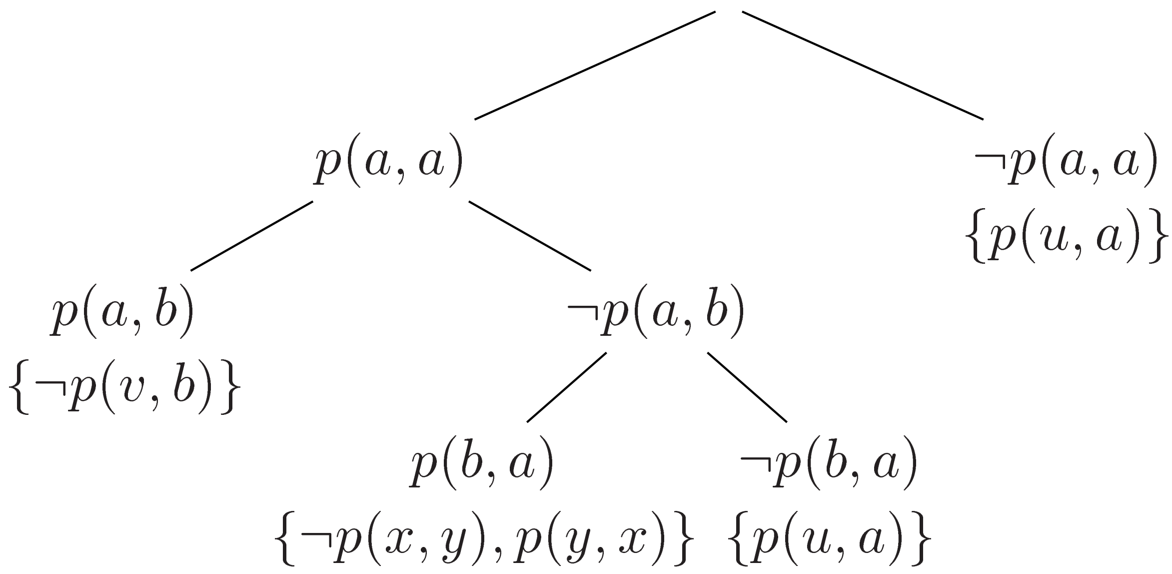
In ST ist Anzahl der Knoten oberhalb irgendeines Fehlschlagsknotens endlich, sonst hätte ST wg. Königs Lemma unendlichen Zweig ohne Fehlschlagsknoten.

Es ist daher wohldefiniert: wähle $K = \{p_1, \ldots, p_k\}$, wobei k maximale Tiefe eines Fehlschlagsknotens in ST. ■

Beispiel

$S = \{\{\neg p(x,y), p(y,x)\},\ \{p(u,a)\},\ \{\neg p(v,b)\}\}$

Es genügt $K = \{p(a,a), p(a,b), p(b,a)\}$ (nur Knoten oberhalb und einschließlich Fehlschlagsknoten dargestellt):



$\{x \leftarrow y\}$ macht $\{\neg p(x,y), p(y,x)\}$ zu tautologischer Klausel, die keinen Fehlschlagsknoten erzeugen kann.

Selbstresolution mit dieser Klausel durch Tautologieregel ausgeschlossen. Drückt Symmetrie von p aus, also wichtiger Fall.

Satz. Sei S unerfüllbare PL Klauselmenge. Dann gilt $S \vdash_R \Box$. ∎

Satz von Herbrand wird hier nicht verwendet, man kann ihn sogar so beweisen.

Beweis: (Satz)

ST geschlossener semantischer Baum für S nach Lemma.

ν Inferenzknoten maximaler Tiefe in ST.

Nachfolger von ν sind Fehlschlagsknoten mit Markierung p und $\neg p$.

$C, D \in S$ Klauseln, die dort fehlschlagen, also $C\sigma = \{\neg p\} \cup C'$, $D\tau = \{p\} \cup D'$ für geeignete σ, τ.

Resolviere $C\sigma$ und $D\tau$ AL zu $E' = C' \cup D'$.

Lifting Lemma: C und D können PL zu E resolviert werden, wobei E' Instanz von E.

E' schlägt bei ν fehl, da Komplemente aller Literale in $C' \cup D'$ außer p und $\neg p$ schon in der Widerlegungsmenge von ν auftauchen.

Da E' Instanz von E, schlägt nach Definition PL Fehlschlag E bei ν fehl.

Klauselmenge $S \cup \{E\}$ hat geschlossenen semantischen Baum mit weniger Fehlschlagsknoten als ST. Rest wie AL. ∎

Vollständigkeit der Löschregeln aus Beweis des Satzes:

R Resolutionsableitung von $\square$ aus S gemäß Beweis.

Pure Klauseln nicht in R: Instanz eines puren Literals kann nie Nachfolger eines Inferenzknotens markieren.

Tautologische Klausel C nicht in R, da keine Instanz einer solchen in einer Widerlegungsmenge.

C und D abgeleitete Klauseln vor beliebigem Resolutionsschritt in R.

Sei $C\sigma \subseteq D$ und D schlage bei ν fehl.

$D\tau$ schlägt für geeignete Grundsubstitution τ bei ν fehl.

Erst recht schlägt $C\sigma\tau$ bei ν fehl: verwende C anstatt D in R.

Vollständigkeit Vorwärts- bzw. Rückwärtssubsumtion folgt aus totaler Subsumtion.

Historische Bemerkungen:

Löschung purer Literale sowie Subsumtion samt des angegebenen Algorithmus schon bei Robinson (1965b).

Löschung von Tautologien ist Regel von Davis & Putnam (1960).

Semantische Bäume für PL Klauseln von Kowalski & Hayes (1969).

Einschränkung der Resolventenbildung

Geordnete Resolution

Semantische Bäume verwenden Aufzählung von At^0_Σ.

Definiere $p < q$ gdw p im semantischen Baum näher bei Wurzel als q.

Dann ist $<$ A-Ordnung auf At^0_Σ.

Definition. $<$ sei eine A-Ordnung auf At_Σ.

Ein semantischer Baum ST für At^0_Σ ist **kompatibel** mit $<$ falls für alle Markierungen K, L gilt: wenn $K < L$, dann ist Knoten von K oberhalb des Knotens von L in ST. ■

Zu jeder A-Ordnung gibt es einen kompatiblen semantischen Baum
(ergänze $<$ zu totaler Ordnung auf At^0_Σ).

Jeder Knoten in einem $<$-kompatiblen semantischen Baum ist $<$-maximal in seiner Widerlegungsmenge.

Definition. Sei $<$ eine A-Ordnung und C, C' PL Klauseln.

E ist ($<$-)**geordnete Resolvente** von C, C', falls E PL Resolvente mit Faktorisierung von C, C' mit mgu σ und resolviertem Literal L ist, so daß $L\sigma$ $<$-maximal in E ist. ■

Faktorisierung ist nicht eingeschränkt.

Geordnete Resolution ist für AL offensichtlich vollständig.

Beispiel:

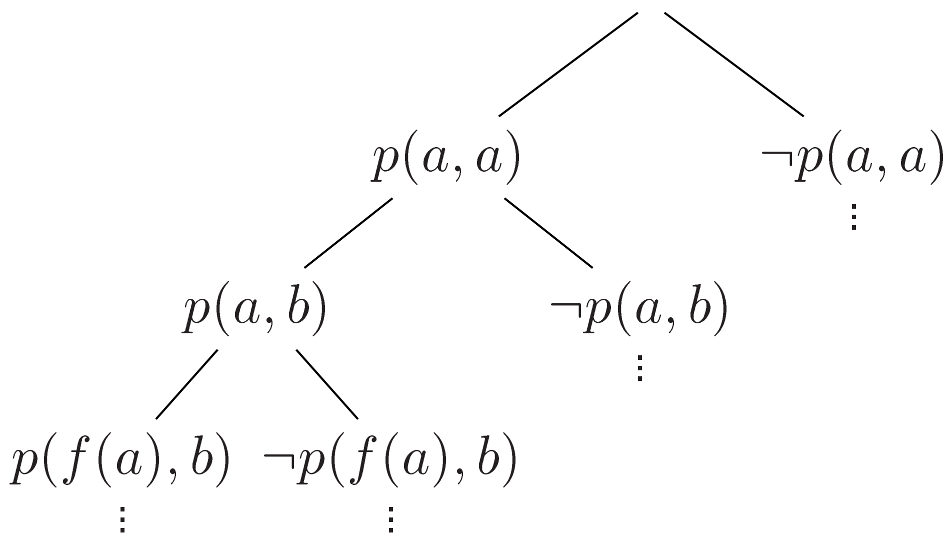
Betrachte früher definierte A-Ordnung $\prec$:

Proposition. Für $p, q \in \mathsf{At}_\Sigma$ sei $p \prec q$, falls

- $\tau(p) < \tau(q)$ und
- $\mathsf{Var}(p) \subseteq \mathsf{Var}(q)$
- $\tau_{\max}(x, p) < \tau_{\max}(x, q)$ für alle $x \in \mathsf{Var}(p)$.

$\prec$ ist eine A-Ordnung. ■

Folgender semantische Baum ist zu ihr kompatibel auf
$\Sigma = \langle\{a, b, f\}, \{p\}, \{a/0, b/0, f/1, p/2\}\rangle$
(nicht alle Atome werden aufgezählt):



Beispiel geordnete Resolutionsableitung.

(Anderes Σ)

$$
\begin{aligned}
S = \{&\{\boxed{p(a)}\},\\
&\{\neg p(x), \boxed{r(f(x))}\},\\
&\{\neg r(y), \boxed{r(f(y))}\},\\
&\{\boxed{\neg r(f^2(a))}\}\}
\end{aligned}
$$

Die letzten beiden Klauseln resolvieren zu $\{\neg r(f(a))\}$.
Zulässig, da $\neg r(f(a)) \prec \neg r(f^2(a))$.

(Resolution von zweiter und vierter Klausel auch möglich, nicht aber von erste und zweiter).

Daraus und aus der zweiten Klausel: $\{\neg p(a)\}$
Zulässig, da $\neg p(a) \prec \neg r(f(a))$.

Schließlich mit erster Klausel $\Box$.

Die Ordnung $\prec$ erzwingt oft die Erzeugung flacherer Terme, aber nicht immer:

$\{p(f(x)), q(x, f(x))\}$ und $\{\neg q(g(y), u)\}$ resolvieren
mit mgu $\{x \leftarrow g(y), u \leftarrow f(g(y))\}$
zu $\{p(f(g(y)))\}$.

Zulässig, da $p(f(g(y)))$ und $q(g(y), f(g(y)))$ unvergleichbar bzgl. $\prec$.

Dennoch ist Termtiefe der Resolvente größer geworden.

Geordnete Resolutionsableitung ist analog zu gewöhnlicher Resolutionsableitung definiert.

Satz. Sei S eine unerfüllbare PL Klauselmenge und $<$ eine A-Ordnung.

Dann gibt es eine $<$-geordnete Resolutionsableitung von $\Box$ aus S. ■

Beweisskizze: Es genügt sicherstellen, daß der konstruierte Resolutionsschritt im Beweis der Grundvollständigkeit der unbeschränkten Resolution geordnet ist.

Wähle wie dort endliches $K \subset \mathrm{At}^0_\Sigma$, so daß jeder semantische Baum über K geschlossen für S.

Betrachte einen semantischen Baum ST, der kompatibel mit $<$ ist.

In ST ist die Markierung $L\rho$ jedes Fehlschlagsknotens maximal in dessen Widerlegungsmenge.

Wegen Substitutivität (Verwendung der Kontraposition) ist auch L maximal in der PL Resolvente aus dem Lifting Lemma. ■

Anwendung: Geringere Zahl möglicher Resolventen kann Gesamtzahl der in einem Beweis zu bildenden Resolventen stark vermindern.

Aber: Geordnete Resolution kann exponentiell längere Beweise als uneingeschränkte Resolution benötigen.

Weitere Anwendung: Bestimmte Formelklassen kann man mit Resolution entscheiden (damit Gegenbeispielerzeugung prinzipiell möglich).

Beispiel: Die Menge aller geschlossenen PL Formeln in PNF der Gestalt

$$\{\exists x_1 \cdots \exists x_m \forall y \exists z_1 \cdots \exists z_n \phi \mid \phi \text{ ohne Quantoren und Funktionssymbole}\}$$

(Ackermann Klasse) ist entscheidbar hinsichtlich Erfüllbarkeit ihrer Elemente.

Beweisskizze: Ackermann Präfixklasse kann mit Skolemisierung auf geschlossene Formeln der Gestalt $\forall\phi$, wobei ϕ quantorenfrei, reduziert werden.

Dies führt zu SNF, in der Klauseln höchstens eine Variable haben.

Hierfür ist Termtiefe bei $\prec$-geordneten Resolventen beschränkt, woraus Endlichkeit von $\mathcal{R}^*(S)$ folgt. ■

Lock Resolution

Ähnlich wie geordnete Resolution:
Verwende Ordnung auf Literalen in Klauseln.

Unabhängig von Instantiierung.

Definition. L^i heißt **indiziertes Literal**, wobei L Literal und $i \in \mathbb{N}$. i ist der **Index** von L.

Eine **indizierte Klausel** ist eine endliche Menge indizierter Literale. unlock$(C) = \{L | L^i \in C\}$.

Indizierte Klausel C erfüllbar gdw unlock(C) erfüllbar.

$L^i\sigma = L\sigma^i$. ■

Beispiel.

$$S = \{\{\neg p(\overset{1}{x}, y), p(\overset{2}{y}, x)\}, \{p(\overset{3}{u}, a)\}, \{\neg p(\overset{4}{v}, b)\}\}$$

Indizierung völlig uneingeschränkt.

Gleiches Atom kann mit unterschiedlichen Indizes in einer Klausel auftauchen.

Reihenfolge der Resolutionsschritte wird durch Indizes eingeschränkt.

Kleinster Index am „stärksten“.

Definition. Zu einer indizierter Klausel C ist die **reduzierte Klausel** $r(C)$ definiert durch:

$r(C) = \{L^i \in C \mid \text{es gibt kein } L^j \in C \text{ mit } j < i\}$ ■

Faktorisierung wird auf minimale Literale beschränkt:

Definition. Sei C eine indizierte Klausel, $L^i \in C$ ein Literal mit minimalem Index und σ mgu von $\{L^i, L_1^{i_1}, \ldots, L_m^{i_m}\} \subseteq C$.
dann heißt $r(C\sigma)$ **Lockfaktor** von C. ■

Beispiel.

$\{\overset{1}{p(x)}, \overset{2}{p(y)}, \overset{2}{q(x)}, \overset{3}{q(a)}\}$

hat als Lockfaktor

$\{\overset{1}{\boxed{p(x)}}, \overset{2}{q(x)}, \overset{3}{q(a)}\}$

nicht aber

$\{\overset{1}{p(x)}, \overset{2}{p(y)}, \overset{2}{\boxed{q(a)}}\}$

Lockresolution: Resolution auf indexminimalen Literalen mit Lockfaktorisierung und anschließender Reduktion.

Definition. Seien C, D indizierte Klauseln, so daß $\mathsf{Var}(C) \cap \mathsf{Var}(D) = \emptyset$, und seien C', D' Lockfaktoren von C, D. Zußerdem seien $L^i \in C'$ und $M^j \in D'$ indexminimale Literale, und σ sei mgu von $\{L^i, \overline{M}^j\}$.

Dann ist

$$r((C' - \{L^i\})\sigma \cup (D' - \{M^j\})\sigma)$$

Lockresolvente von C und D. ■

Indizes von Literalen auf werden auf die Resolvente vererbt.

$\vdash_{RL}$ analog zu $\vdash_{RF}$ definiert.

Beispiel:

$$S = \{\{\overset{1}{\boxed{\neg p(x,y)}}, \overset{2}{p(y,x)}\}, \{\overset{3}{\boxed{p(u,a)}}\}, \{\overset{4}{\boxed{\neg p(v,b)}}\}\}$$

Ohne Indizes zwei Resolutionsschritte möglich. (Dritte und vierte Klausel nicht unifizierbar)

$\{\neg p(x,y), p(y,x)\}$ und $\{p(u,a)\}$, sowie

$\{\neg p(x,y), p(y,x)\}$ und $\{\neg p(v,b)\}$.

Keine A-Ordnung kann einen der beiden Schritte verhindern, da wegen Unifizierbarkeit niemals $p(u,a) < p(a,u)$ oder $p(v,b) < p(b,v)$.

Bei Lock Resolution zweite Resolutionsmöglichkeit ausgeschlossen, da $p(y,x)$ nicht minimal in erster Klausel.

Umgekehrt kann Lock Resolution nicht geordnete Resolution simulieren, da der Index eines Literals unabhängig von seinen Instantiierungen ist.

Aussagenlogische Vollständigkeit

Satz. Sei S endliche Menge indizierter AL Klauseln.

Wenn S unerfüllbar ist, dann gilt $S \vdash_{RL} \Box$. ∎

Beweis: Die Anzahl der **Überschußliterale** einer endlicher Klauselmenge S sei definiert durch:

$$k(S) = \left(\sum_{C \in S} |C| \right) - |S| \ .$$

Sei nun $\Box \notin S$ (sonst trivial).

Beweis durch Induktion über $k(S)$.

$k(S) = 0$: S enthält nur Einerklauseln.

Es gibt $\{L^i\}$ und $\{\overline{L}^j\}$ in S, sonst S erfüllbar (wie offener Tableauzweig).

$\Box$ ist Lockresolvente von $\{L^i\}$ und $\{\overline{L}^j\}$.

$k(S) > 0$: es gibt $C = \{L^r\} \cup C'$ in S mit $C' \neq \Box$.

Sei C so, daß r höchster Index in Nicht-Einerklauseln von S.

$S_1 = (S - \{C\}) \cup \{C'\}$
$S_2 = (S - \{C\}) \cup \{\{L^r\}\}$

S_1, S_2 unerfüllbar (sonst wäre S erfüllbar).
Außerdem $k(S_i) < k(S)$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für $i = 1, 2$:
$S_i \vdash_{RL} \Box$ mit Resolutionsableitungen Γ'_i.

Γ_1 entstehe aus Γ'_1, indem jeweils C an Stelle von C' verwendet wird.

Da r höchster Index in Nicht-Einerklausel von S:
Auch Γ_1 ist Lockresolutionsableitung.

Γ_1 endet mit $\{L^r\}$ oder mit $\Box$. Falls letzteres, ist der Beweis fertig, sonst ist Obermenge von S_2 abgeleitet, und Γ'_2 liefert $\Box$. ■

Prädikatenlogische Vollständigkeit folgt sofort mit folgendem Lemma:

Lemma. Für indizierte PL Σ-Klauselmengen S und $T \subseteq \mathrm{Term}^0_\Sigma$:

$\mathcal{R}_{RL}(r(T(S))) \subseteq r(T(\mathcal{R}_{RL}(S)))$. ■

Beispiel.

S von vorher. Eine geeignete Grundinstanz:

$$S' = \{\{\neg \overset{1}{p}(b,a), \overset{2}{p}(a,b)\},\ \{\overset{3}{p}(b,a)\},\ \{\neg \overset{4}{p}(a,b)\}\}$$

Indexmaximales Literal L^2 einziger Nichteinerklausel C

$$C = \{\neg \overset{1}{p}(b,a), \overset{2}{p}(a,b)\} \qquad L^2 = \overset{2}{p}(a,b)$$

$$C' = \{\neg \overset{1}{p}(b,a)\}$$

$$S_1 = \{\{\neg \overset{1}{p}(b,a)\},\ \{\overset{3}{p}(b,a)\},\ \{\neg \overset{4}{p}(a,b)\}\}$$

$$\square$$

Ersetze C' durch C ($\neg \overset{1}{p}(b,a)$ bleibt minimal):

$$S = \{\{\neg \overset{1}{p}(b,a), \overset{2}{p}(a,b)\},\ \{\overset{3}{p}(b,a)\},\ \{\neg \overset{4}{p}(a,b)\}\}$$

$$\{\overset{2}{p}(a,b)\}$$

$$S_2 \subseteq \{C,\ \{\overset{2}{p}(a,b)\},\ \{\overset{3}{p}(b,a)\},\ \{\neg \overset{4}{p}(a,b)\}\}$$

$$\square$$

Lockresolution ist **inkompatibel** mit anderen Verfeinerungen.

Definition. Seien C, D indizierte Klauseln.

C subsumiert D falls es eine Substitution σ gibt, so daß unlock$(C)\sigma \subseteq$ unlock(D). ■

Proposition.
Lockresolution + Tautologielöschung unvollständig.

Lockresolution + Vorwärtssubsumtion unvollständig.
■

Subsumtion kann jedoch angepaßt werden:

Definition. Seien C, D indizierte Klauseln.

C locksubsumiert D falls es eiine Substitution σ gibt, so daß $C\sigma \subseteq D$. ■

Beispiele:

$S = \{\{\overset{1}{p}, \overset{2}{r}\}, \{\overset{3}{\neg r}, \overset{4}{p}\}, \{\overset{5}{r}, \overset{6}{\neg p}\}, \{\overset{7}{\neg p}, \overset{8}{\neg r}\}\}$.

S ist unerfüllbar.

$\mathcal{R}_{RL}(S) = \{\{\overset{2}{r}, \overset{8}{\neg r}\}, \{\overset{4}{p}, \overset{6}{\neg p}\}\} \cup S$

$\mathcal{R}^2_{RL}(S) = \{\{\overset{4}{p}, \overset{8}{\neg r}\}, \{\overset{6}{\neg p}, \overset{8}{\neg r}\}\} \cup \mathcal{R}_{RL}(S)$

Aus $\{\overset{4}{p}, \overset{8}{\neg r}\}$ und $\{\overset{7}{\neg p}, \overset{8}{\neg r}\}$ Lockresolvente $\{\overset{8}{\neg r}\}$.

Daraus mit $\{\overset{5}{r}, \overset{6}{\neg p}\}$ Lockresolvente $\{\overset{6}{\neg p}\}$, und mit $\{\overset{1}{p}, \overset{2}{r}\}$ davon $\{\overset{2}{r}\}$.

Schließlich mit $\{\overset{8}{\neg r}\}$ leere Klausel.

1. Mit Tautologielöschung $S = \mathcal{R}_{RL-\mathsf{taut}}(S)$ und damit $\Box \notin S = \mathcal{R}^*_{RL-\mathsf{taut}}(S)$.

2. $\{\overset{4}{p}, \overset{8}{\neg r}\}$ wird von $\{\overset{3}{\neg r}, \overset{4}{p}\}$ subsumiert.
   $\{\overset{6}{\neg p}, \overset{8}{\neg r}\}$ wird von $\{\overset{7}{\neg p}, \overset{8}{\neg r}\}$ subsumiert.
   (jeweils nicht locksubsumiert!)
   Damit $\Box \notin \mathcal{R}_{RL-\mathsf{fs}}(S) = \mathcal{R}^*_{RL-\mathsf{fs}}(S)$.