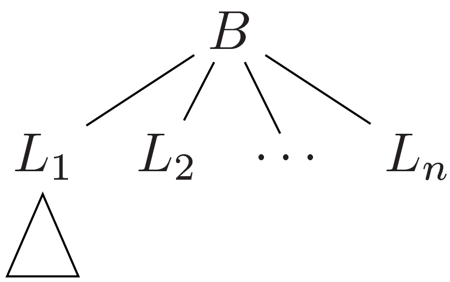
Grund für die Bezeichnung „Tableau mit Lemmata“

Ast B werde mit Klausel $C = \{L_1, \ldots, L_n\} \in S$ erweitert.

Jeder neue Zweig $B \cup \{L_1\}$, $\ldots$,$B \cup \{L_n\}$ ist zu schließen, insbesondere $B \cup \{L_1\}$.

Situation nach Abschluß von $B \cup \{L_1\}$:



Es ist nun gezeigt, daß $S \cup B \cup \{L_1\}$ unerfüllbar ist.
Also gilt: $S \cup B \models \neg L_1$

Interpretation: $\neg L_1$ ist ein bzgl. B lokales Lemma.

Damit ist es korrekt, $\neg L_1$ zu den übrigen neuen Ästen hinzuzufügen.

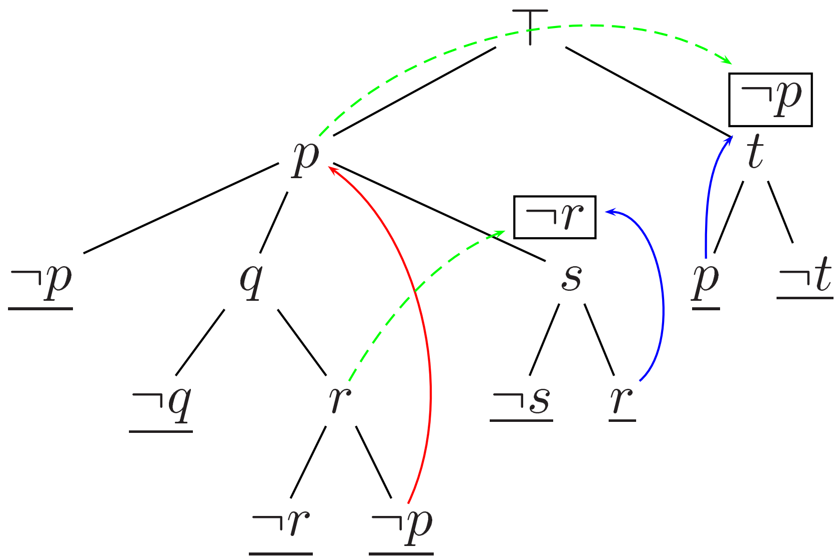
Iteration dieser Überlegung ergibt die Erweiterungsregel mit Lemmata.

Die Teiltableaus unterhalb der L_i sind Beweise der lokalen Lemmata $S \cup B \models \neg L_i$.

Klauseltableaus mit „Hochklappen“

Letz et al. (1992); Letz (1993)

$$S = \{\{p, t\}, \{p, \neg t\}, \{\neg p, q, s\}$$
$$\{\neg q, r\}, \{\neg r, \neg p\}, \{\neg s, r\}\}$$



Lemmata dürfen bis zum niedrigsten für ihren Beweis verwendeten Literal „hochgeklappt“ werden.

Erzeugung der Lemmata verzögert, bis Information über Abschluß gesammelt.

Tableaus mit Faktorisierung

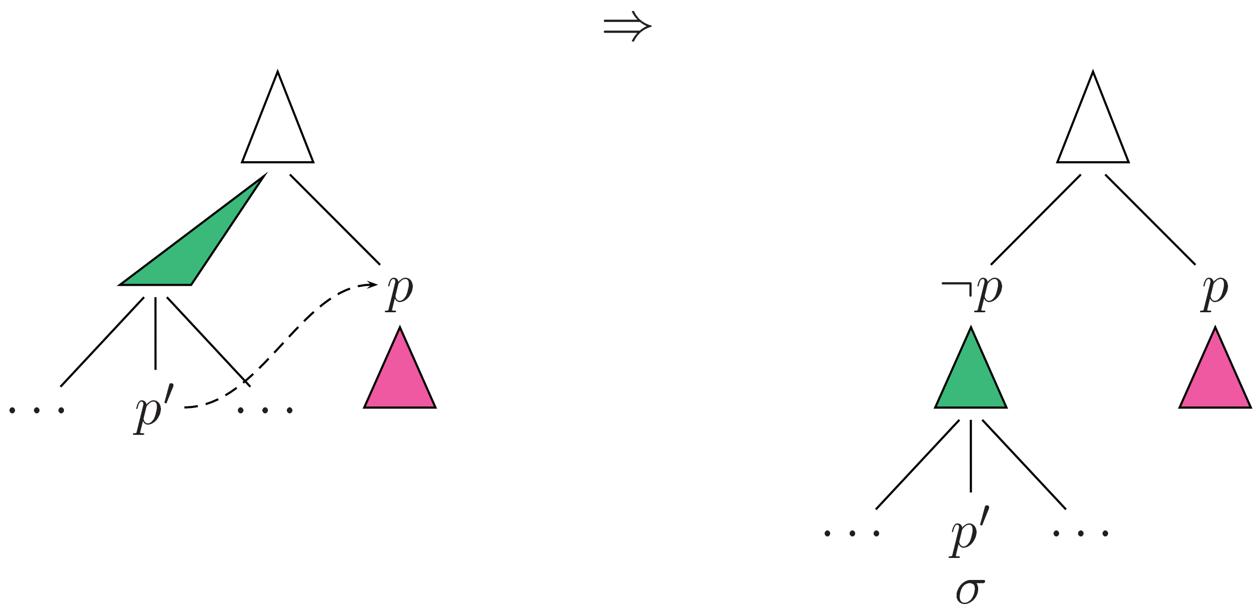
Seien B, B' Zweige, so daß $B \subseteq B'\sigma$.

Falls B geschlossen ist, kann auch B' geschlossen werden mit Verweis auf B.

Verweise dürfen nicht zyklisch sein.

Tableaus mit Faktorisierung Spezialfall von Tableaus mit Lemmata:

$p = p'\sigma$ kommt in linkem Zweig vor uns ist o.B.d.A. Blatt.



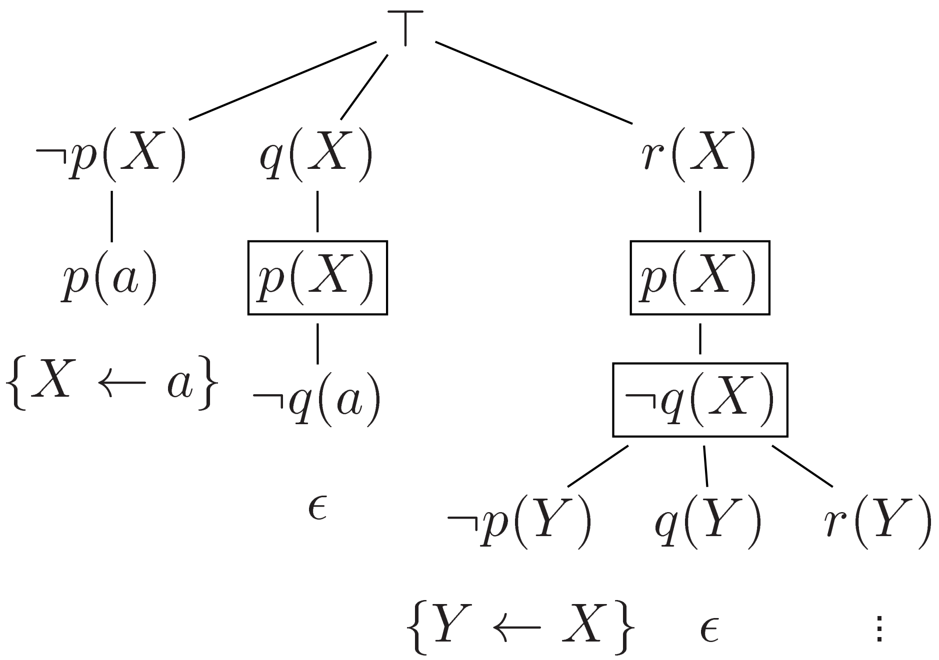
Nachteile der Tableaus mit Lemmata

Aussagenlogik: keine

Prädikatenlogik:
zusätzliche Choicepoints in `select_pair` können zu starker Vergrößerung des Suchraums führen.

Beispiel: Konnektionstableaus mit Lemmata

$$S = \{\{\neg p(x), q(x), r(x)\}, \{p(a)\},$$
$$\{\neg q(a)\}, \{p(b)\}, \{\neg q(b)\}, \{\neg r(b)\}\}.$$



Resolution

Resolution war dominierende Kalkülfamilie bis Mitte 80er für „Automatisches Beweisen“.

Hauptgrund: SNF und Unifikation „fest eingebaut“

Weitere Vorteile:

- Uniforme, relativ einfache Inferenzregel
- beweiskonfluent
- Fairneß leicht zu erreichen (auch bei PL)
- Effiziente Implementierung einfacher als bei Tableaus

Definition. Seien

$$\begin{aligned} C &= \{L, L_1, \ldots, L_n\} \\ C' &= \{\overline{L}, L'_1, \ldots, L'_m\} \end{aligned}$$

AL Klauseln. Dann heißt

$$E = (C - \{L\}) \cup (C' - \{\overline{L}\})$$

AL **Resolvente** mit **Elternklauseln** C, C';
L ist das **resolvierte Literal**. ■

Beispiel: $C = \{p, q, \neg r\}$, $D = \{q, s, r\}$.
$L = \neg r$ resolviertes Literal.
$\{p, q, s\}$ AL Resolvente von C und D.

Klauseln sind Mengen, also z.B. $\{q\} = \{q, q\}$.

Resolutionsregel in Sequenzennotation (o.B.d.A. L atomar):

$$\frac{\overline{L_1}, \dots, \overline{L_n} \to L \quad L \to L'_1, \dots, L'_m}{\overline{L_1}, \dots, \overline{L_n} \to L'_1, \dots, L'_m}$$

Resolution ist *logisch* ein Schnitt, aber:

– Resolutionsregel „von oben nach unten“ angewandt, d.h. Schnittformel immer bekannt.

– Daher hat Resolutionsableitung nicht Baumstruktur der Sequenzen- bzw. Tableaubeweise.

Prädikatenlogik:

Vor Resolutionsschritt durch geeignete Substitution komplementäres Paar erzeugen
(wie bei Abschluß von Zweigen im Tableaukalkül)

Definition. Seien

$$\begin{aligned} C &= \{L, L_1, \ldots, L_n\} \\ C' &= \{L', L'_1, \ldots, L'_m\} \end{aligned}$$

bereinigte PL Klauseln, so daß es mgu σ von L und $\overline{L'}$ gibt. Dann ist

$$(C - \{L\})\sigma \cup (C' - \{L'\})\sigma$$

eine **PL Resolvente** von C, C'. ■

Alle Eingabeklauseln *und* Resolventen sind universell bzgl. der in ihnen vorkommenden Variablen.

Beispiel.

$$C = \{\overbrace{p(a,x)}^{L},\ \overbrace{p(x,x)}^{C-\{L\}}\},\ D = \{\overbrace{\neg p(y,y)}^{L'}\}.$$

$$\sigma = \{y \leftarrow a,\ x \leftarrow a\}$$

$$\begin{aligned} E &= (C - \{L\})\sigma \cup (C' - \{L'\})\sigma \\ &= \{p(x,x)\}\sigma \cup \{\}\sigma \\ &= \{p(a,a)\} \end{aligned}$$

Literatur, z.B. Chang & Lee (1973), kennt weitere Variante der Resolutionsregel:

$$(C\sigma - \{L\}\sigma) \cup (D\sigma - \{\overline{L}\}\sigma)$$

Substitution (mit σ) *dann* AL Resolution.

Beispiel hat damit $\Box$ (leere Klausel) als Resolvente.

Hier erste Definition verwendet.

Beispiel mit Veriante:

$$\begin{array}{rcl} E & = & (C\sigma - \{L\}\sigma) \cup (D\sigma - \{\overline{L}\}\sigma) \\ & = & (\{p(a,a)\} - \{p(a,a)\}) \cup \\ & & (\{\neg p(a,a)\} - \{\neg p(a,a)\}) \\ & = & \Box \end{array}$$

Notation: Sei $S = \{C_1, \ldots, C_m\}$ ein Menge von PL Klauseln.

$R(C_i, k; C_j, l)$ bezeichnet die Resolvente mit Elternklauseln C_i und C_j, wobei über k-tes Literal in C_i und l-tes Literal in C_j resolviert wurde.

Lemma. Sei S eine Menge von PL Klauseln und M ein Herband-Modell von S.

Dann ist M auch Modell aller Resolventen E von Klauseln $C, D \in S$. ■

Beweis: In Herbrand-Interpretation sind Variablenbelegungen *Grund*substitutionen. Aus Substitutionstheorem folgt also:

Für Herbrand-Interpretation $\mathcal{D}$, Variablenbelegungen β, β', Term t, Grundterm t^0 und Formel A:

(*) $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t\beta) = t\beta$ und
$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(A\beta)$

(**) $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t^0) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t^0)$

Sei nun $\mathcal{D}$ Herbrand-Modell von S und o.B.d.A. $\mathsf{Var}(E) \cap \mathsf{Var}(S) = \emptyset$; β sei beliebig; und $L \in C$ sei das resolviertes Literal mit mgu σ.

1. Fall: $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(L\sigma) = W$, also

$$F = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\overline{L\sigma}) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\overline{L}\sigma) \overset{(*)}{=} \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\overline{L}\sigma\beta)$$
$$\overset{(**)}{=} \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta\circ\sigma}(\overline{L}\sigma\beta) \overset{(*)}{=} \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta\circ\sigma}(\overline{L})$$

Nach Voraussetzung $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta\circ\sigma}(D) = W$,
also $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta\circ\sigma}(D - \{\overline{L}\}) = W$.
Umgekehrt wie eben schließend folgt
$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}((D - \{\overline{L}\})\sigma) = W$,
also $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(E) = W$.

2. Fall: $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(L\sigma) = F$ analog
β beliebig, also $\mathcal{D}$ Modell von E. ■

Resolutionsregel alleine unvollständig für PL.

Beispiel.

$S = \{\{p(x), p(y)\}, \{\neg p(u), \neg p(v)\}\}$ unerfüllbar, aber hat nur Resolventen der Länge 2.

Faktorisierung:

Definition. Sei C eine PL Klausel, $A \subseteq C$, und σ mgu von A.

Dann heißt $C\sigma$ **Faktor** von C. ■

Beispiel.

$\{p(x)\} = \{p(x), p(y)\}\{y \leftarrow x\}$ ist (nicht-trivialer) Faktor von $\{p(x), p(y)\}$.

Notation: Sei $S = \{C_1, \ldots, C_m\}$ eine Menge von PL Klauseln.

$F(C_i, k_1, \ldots, k_m)$ bzeichnet den Faktor $C_i\sigma$, wobei σ mgu der Literale L_{k_1} bis L_{k_m} von C_i ist.

Lemma. Sei S eine Menge von PL Klauseln und M ein Herbrand-Modell von S.

Dann ist M auch Modell aller Faktoren D von Klauseln $C \in S$. ■

Günstiger ist es, Faktorisierungsregel und PL Resolutionsregel zusammenzuziehen:

Definition. Seien C, C' bereinigte PL Klauseln mit Faktoren

$$\begin{aligned}\widetilde{C} &= \{L, L_1, \ldots, L_n\} \\ \widetilde{C}' &= \{L', L'_1, \ldots, L'_m\}\end{aligned}$$

und es gebe mgu σ von L und $\overline{L'}$. Dann ist

$$(\widetilde{C} - \{L\})\sigma \cup (\widetilde{C}' - \{L'\})\sigma$$

PL Resolvente mit Faktorisierung von C und C'. ■

Notation: $RF(C_i, k_1, \ldots, k_q; C_j, l_1, \ldots, l_r)$ analog zu Resolution ohne Faktorisierung.

Lemma. Sei S eine Menge von PL Klauseln und M ein Herbrand-Modell von S.

Dann ist M auch Modell aller PL Resolventen mit Faktorisierung E von Klauseln $C, D \in S$. ■

Definition. Sei S eine Menge PL Klauseln.

C ist aus S durch **Resolution** abgeleitet,
in Symbolen $S \vdash_R C$,
falls es eine Folge von Klauseln $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ gibt, so daß $C_n = C$ und für alle C_i, $1 \leq i \leq n$ gilt:

1. $C_i \in S$ oder
2. C_i ist PL Resolvente mit Faktorisierung von bereinigten Klauseln C_j, C_k mit $j, k < i$.

$\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ heißt **(Resolutions-)Ableitung** von C aus S. ■

Entsprechend $\vdash_{RA}$ für AL Klauselmengen definiert.

Beispiel:

$C = \{p(x), p(y)\}$, $D = \{\neg p(u), \neg p(v)\}$

$\widetilde{C} = \{\overbrace{p(x)}^{L}\}$, $\widetilde{D} = \{\overbrace{\neg p(u)}^{L'}\}$

$\sigma = \{x \leftarrow u\}$

$E = \Box$

$E = RF(C, 1, 2; D, 1, 2)$

Beispiel:

$\{\{p(x), p(y)\}, \{\neg p(u), \neg p(v)\}\} \vdash_R \Box.$

C_1 :	$\{p(x), p(y)\}$	S
C_2 :	$\{\neg p(u), \neg p(v)\}$	S
C_3 :	$\{p(x)\}$	$F(C_1, 1, 2)$
C_4 :	$\{\neg p(u)\}$	$F(C_2, 1, 2)$
C_5 :	$\Box$	$R(C_3, 1; C_4, 1)$
C_3' :	$\Box$	$RF(C, 1, 2; D, 1, 2)$

Beispiel:

$S_n = \{\{p(0)\}, \{\neg p(x), p(s(x))\}, \{\neg p(s^{2^n}(x))\}\} \vdash_R \Box$

C_1 :	$\{p(0)\}$	S
C_2 :	$\{\neg p(x), p(s(x))\}$	S
C_3 :	$\{\neg p(s^{2^n}(x))\}$	S
C_4 :	$\{\neg p(x), p(s(s((x)))\}$	$R(C_2, 2; C_2, 1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_{i+3} :	$\{\neg p(x), p(s^{2^i}(x))\}$	$R(C_{i+2}, 2; C_{i+2}, 1)$
C_{n+3} :	$\{\neg p(x), p(s^{2^n}(x))\}$	$R(C_{n+2}, 2; C_{n+2}, 1)$
C_{n+4} :	$\{p(s^{2^n}(0))\}$	$R(C_1, 1; C_{n+3}, 1)$
C_{n+5} :	$\Box$	$R(C_3, 1; C_{n+4}, 1)$

Länge der Ableitung $n + 5$

DAG-Notation für Resolutionsableitungen:

RA $\Gamma = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$

DAG mit:

- Knoten $\{C \mid C$ kommt in Γ vor$\}$
- Kanten $\{\langle C, E \rangle \mid C$ Elternklausel von $E\}$

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & \{\neg p(x), p(s(x))\} \arrow[d] & & \\
 & \{\neg p(x), p(s^2(x))\} \arrow[d] & & \\
 & \{\neg p(x), p(s^4(x))\} \arrow[d, dotted] & & \\
 & \{\neg p(x), p(s^{2^n}(x))\} \arrow[dr] & & \{p(0)\} \arrow[dl] \\
 \{\neg p(s^{2^n}(x))\} \arrow[dr] & & \{p(s^{2^n}(0))\} \arrow[dl] & \\
 & \square & &
\end{tikzcd}
$$

Baumnotation für Resolutionsbeweise:

Standardtransformation DAG $\rightsquigarrow$ Baum

Satz. Korrektheit.
Sei S eine PL Klauselmenge.
Wenn $S \vdash_R \Box$ dann ist S unerfüllbar. ■

Beweis:

Angenommen S wäre erfüllbar, hätte also ein Herbrand-Modell M.

Durch Induktion über die Länge der Ableitung zeigen wir:
für alle C, wenn $S \vdash_R C$ dann ist M Modell von $S \cup \{C\}$.

$n = 1 : C \in S$, also $S = S \cup \{C\}$.

$n > 1 : \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$ Ableitung von C aus S.

1. Fall: $C \in S$, s.o.
2. Fall: $C = RF(C_i, k_1, \ldots, k_q; C_j, l_1, \ldots, l_r)$ für $i, j < n$. Dann ist M Modell von C_i, C_j nach Induktionsvoraussetzung und es ist auch Modell von C nach Lemma.

Da $S \vdash_R \Box$, hat also $\Box$ ein Modell. Widerspruch. ■

Satz. Vollständigkeit.
Sei S eine PL Klauselmenge.
Wenn S unerfüllbar ist, dann gilt $S \vdash_R \square$. ■

Beweis: Satz von Herbrand: es gibt endliche Menge $S' \subset \mathrm{Term}^0_\Sigma(S)$, die unerfüllbar ist. Diese ist AL unerfüllbar über der Signatur At^0_Σ.

Vollständigkeit der AL Resolution: $S' \vdash_{RA} \square$ mit AL Ableitung $\Gamma^0 = \langle C^0_1, \ldots, C^0_n \rangle$.

Lifting: aus Γ^0 konstruiere PL Ableitung Γ von $\square$ aus S, so daß für geeignete Substitution η: $\Gamma\eta = \Gamma^0$.
■

Beweis macht (wie bei Klauseltableaus) Gebrauch von:

– Grundvollständigkeit

– Lifting

Diese sind nocht zu zeigen.

Lifting

Schwierigkeiten beim Lifting:

1. In PL Ableitung sind ggf. zusätzlich Faktorisierungsschritte erforderlich
2. Substitutionen in PL Resolutionsschritten müssen mgus sein

Notation:

$\mathcal{R}^n(S)$: die Klauseln, die mit Resolutionsableitung der Länge $\leq n$ aus S abgeleitet werden können.

$\mathcal{R}(S) = \bigcup_{n \geq 0}(\mathcal{R}^n(S))$

Falls S endlich ist, ist $\mathcal{R}^n(S)$ endlich.

Hinreichend für Lifting:

Lemma. Für PL Σ-Klauselmenge S und $T \subseteq \mathrm{Term}^0_\Sigma$ gilt:

$$\mathcal{R}(T(S)) \subseteq T(\mathcal{R}(S))$$

■