Die Tableaumethode

Was ist die Tableaumethode?

– Widerspruchsbeweis

– durch Fallunterscheidung bis zu elementaren Widersprüchen

Beispiel aus der Mengenlehre

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & S \cap Q & = & \emptyset \\
(2) & P & \subseteq & Q \cup R \\
(3) & P = \emptyset & \leadsto & Q \neq \emptyset \\
(4) & Q \cup R & \subseteq & S \\
\hline
(5) & P \cap R & \neq & \emptyset
\end{array}$$

Beweis durch Widerspruch

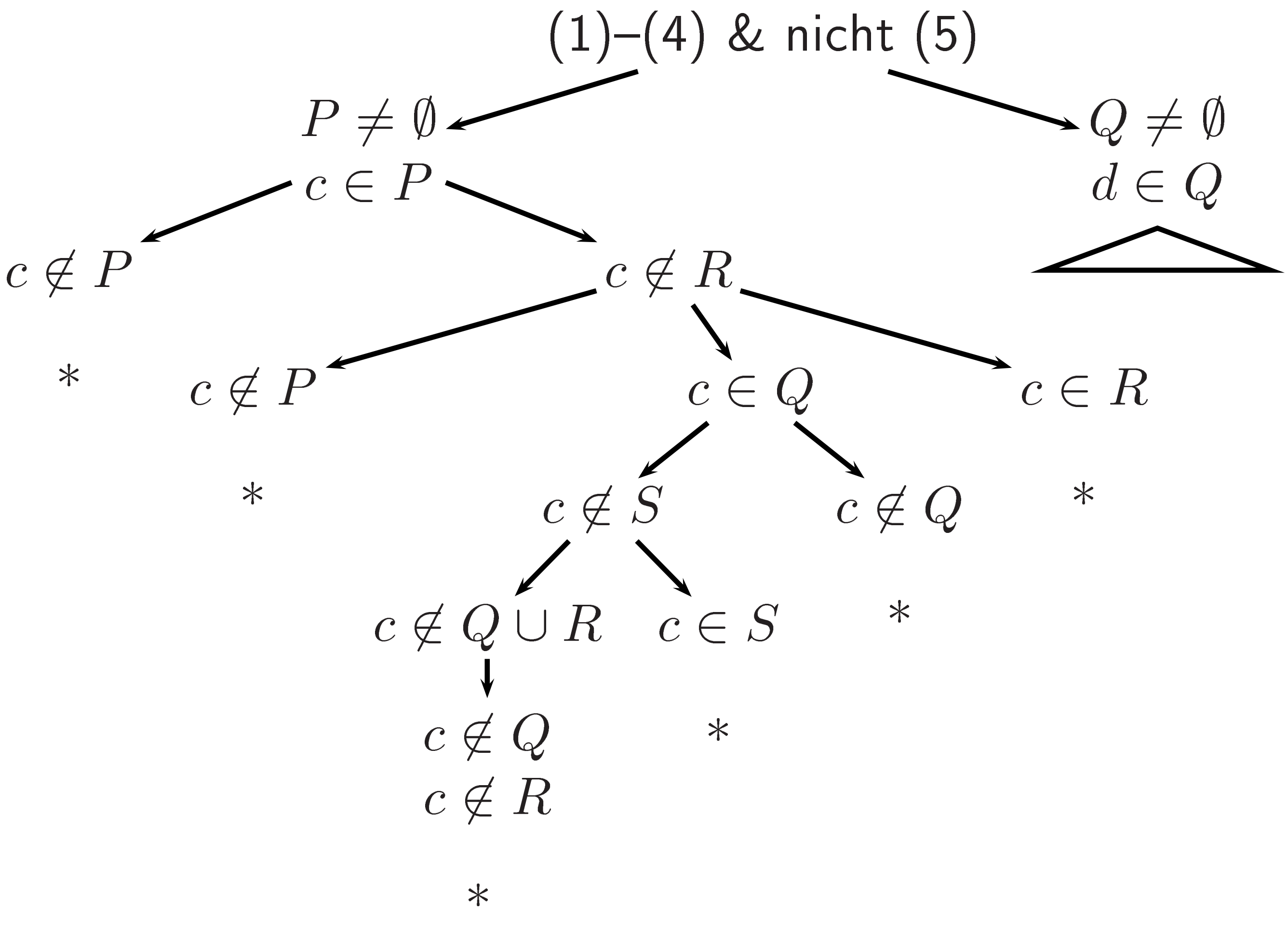
Angenommen, (1)–(4) gelten aber (5) nicht.

Dann gilt:

(3)	$c \in P$ oder $d \in Q$ für Elemente c, d
nicht (5)	$c \not\in P$ oder $c \not\in R$
(2)	$c \not\in P$ oder $c \in Q$ or $c \in R$
(1)	$c \not\in S$ oder $c \not\in Q$
(4)	$c \not\in Q \cup R$ oder $c \in S$

Die Tableaumethode: Beispiel

(3)	$c \in P$ oder $d \in Q$ für Elemente c, d
nicht (5)	$c \notin P$ oder $c \notin R$
(2)	$c \notin P$ oder $c \in Q$ or $c \in R$
(1)	$c \notin S$ oder $c \notin Q$
(4)	$c \notin Q \cup R$ oder $c \in S$



$*$ symbolisiert Widerspruch

Charakteristische Eigenschaften von Tableaukalkülen

Widerspruchsbeweis

Fallunterscheidung

Top-down-Verfahren: „Analyse der Behauptung“

Formalisierung/Darstellung des Beweises

Endlichverzweigender, mit Formeln markierter Baum

Verzweigung $\sim$ Fallunterscheidung $\sim$ Disjunktion

Tableauregeln für Formeln erster Stufe

[Smullyan, 1968]

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \land q \\ \downarrow \\ p \\ \downarrow \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{tikzcd} & p \lor q \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ p & & q \end{tikzcd}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(t)}$$

$t \in \mathsf{Term}^0_\Sigma$ beliebig

universell

$$\begin{array}{c} \forall x(p(x)) \\ \downarrow \\ p(f(a)) \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1(c)}$$

c neu

existentiell

$$\begin{array}{c} \exists x(p(x, f(a))) \\ \downarrow \\ p(c, f(a)) \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\psi\\ \neg\psi\end{array}}{*}$$

Widerspruch

$$\begin{array}{c} p(a) \\ \downarrow \\ \neg p(a) \\ \downarrow \\ * \end{array}$$

Tableaubeweise

$M = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$
eine endliche Menge abgeschlossener Formeln

Tableau

Endlichverzweigender, markierter Baum

Tableaukonstruktionsregeln

Initialisierung

Linearer Baum, der genau m Knoten hat,
die mit $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$ markiert sind,
ist ein Tableau für M

Erweiterung

- T ein Tableau für M
- B ein Zweig in T
- ϕ Formel auf B von einem Typ $\alpha, \ldots, \delta$

Dann ist T' ein Tableau für M, wenn es entsteht durch Anwendung der entsprechenden Regel auf ϕ und Erweiterung von B mit den Formeln in der Konklusion

Tableaubeweise

Geschlossener Ast

Ein Ast in einem Tableau ist geschlossen
(bzw. wird als geschlossen markiert),
wenn er ein komplementäres Formelpaar enthält

Geschlossenes Tableau

Ein Tableau ist geschlossen,
wenn alle seine Zweige geschlossen sind.

Tableaubeweis

Ein geschlossenes Tableau ist ein Tableaubeweis
(für die Unerfüllbarkeit von M)

Satz: Korrektheit und Vollständigkeit

Seien $\{\psi\}, \Phi \subset \mathrm{For}_\Sigma$ abgeschlossen (Φ endlich).

Es gibt einen Tableaubeweis für $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ genau dann, wenn $\Phi \models \psi$.

Tableaukalkül: Beispiel

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & S \cap Q & = & \emptyset \\
(2) & P & \subseteq & Q \cup R \\
(3) & P = \emptyset & \leadsto & Q \neq \emptyset \\
(4) & Q \cup R & \subseteq & S \\
\hline
(5) & P \cap R & \neq & \emptyset
\end{array}
$$

Signatur

$\Sigma_{\mathsf{Set}} = \langle \{\}, \{p, q, r, s\}, \alpha \rangle$ mit
$\alpha(p) = \alpha(q) = \alpha(r) = \alpha(s) = 1$

Modellierung

Einstelligen Prädikaten $p, q, \ldots$ modellieren Mengen

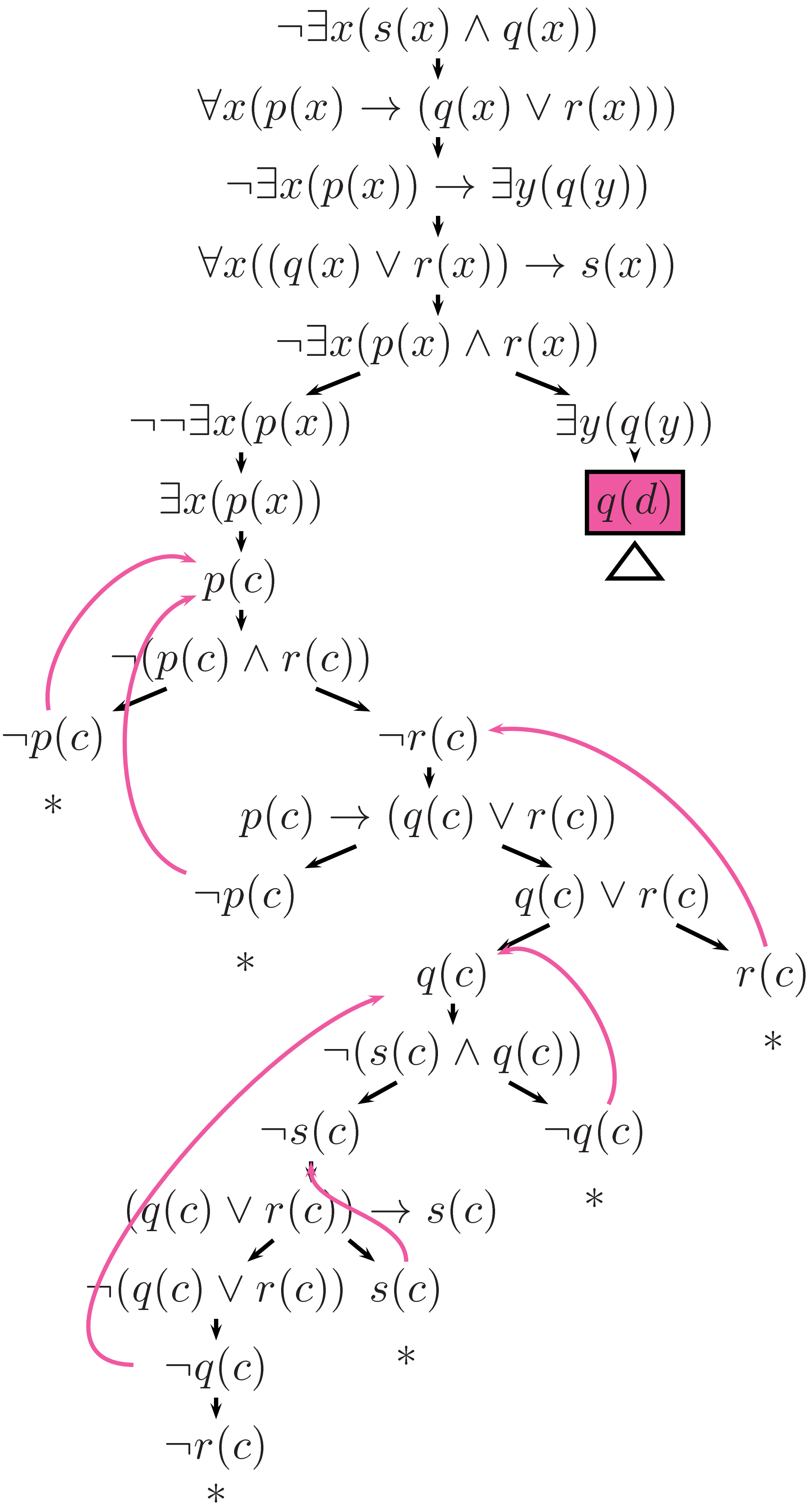
Konjunktion entspricht Durchschnitt.
Disjunktion entspricht Vereinigung.
Implikation entspricht Teilmengenrelation usw.

$$\{(\neg\exists x(s(x) \land q(x))\land$$

$$\forall x(p(x) \to (q(x) \lor r(x)))\land$$

$$\neg\exists x(p(x)) \to \exists y(q(y))\land$$

$$\forall x((q(x) \lor r(x)) \to s(x))) \to$$
$$\exists x(p(x) \land r(x))\}$$


$\neg\exists x(s(x) \land q(x))$
$\forall x(p(x) \to (q(x) \lor r(x)))$
$\neg\exists x(p(x)) \to \exists y(q(y))$
$\forall x((q(x) \lor r(x)) \to s(x))$
$\neg\exists x(p(x) \land r(x))$
$\neg\neg\exists x(p(x))$
$\exists y(q(y))$
$\exists x(p(x))$
$q(d)$
$p(c)$
$\neg(p(c) \land r(c))$
$\neg p(c)$
$\neg r(c)$
$*$
$p(c) \to (q(c) \lor r(c))$
$\neg p(c)$
$q(c) \lor r(c)$
$*$
$q(c)$
$r(c)$
$\neg(s(c) \land q(c))$
$*$
$\neg s(c)$
$\neg q(c)$
$(q(c) \lor r(c)) \to s(c)$
$*$
$\neg(q(c) \lor r(c))$
$s(c)$
$\neg q(c)$
$*$
$\neg r(c)$
$*$

Tableaus mit freien Variablen

Die richtigen Instanzen finden

Problem:

Es ist sehr schwierig, zu „raten“,
welche Instanzen im Beweis nützlich sind.

Lösung:

Tableaus mit freien Variablen

Freie Variablen (Dummies, Platzhalten)
werden „bei Bedarf“ instantiiert.

Tableaus mit freien Variablen: Regeln

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

konjunktiv

$$\begin{array}{c} p \land q \\ \downarrow \\ p \\ \downarrow \\ q \end{array}$$

$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

disjunktiv

$$\begin{array}{ccc} & p \lor q & \\ \swarrow & & \searrow \\ p & & q \end{array}$$

$$\frac{\gamma}{\gamma_1(y)}$$

$y \in$ Var neu

universell

$$\begin{array}{c} \forall x(p(x)) \\ \downarrow \\ p(y) \end{array}$$

$$\frac{\delta}{\delta_1(f_\delta(x_1, \ldots, x_n))}$$

$\{x_1, \ldots, x_n\} =$ Frei(δ)

existentiell

$$\begin{array}{c} \exists x(p(x, y)) \\ \downarrow \\ p(f(y), y) \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\phi\\ \neg\psi\end{array}}{*}$$

ϕ, ψ unifizierbare Literale

Widerspruch

$$\begin{array}{c} p(x) \\ \downarrow \\ \neg p(a) \\ \downarrow \\ * \end{array}$$

Mgu von ϕ, ψ angewendet auf <u>ganzes</u> Tableau!

$\{x \leftarrow a\}$ angewendet

Tableaubeweise

$M = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$
endliche Menge abgeschlossener Formeln

Tableaukonstruktionsregeln

Initialisierung wie zuvor

Erweiterung wie zuvor

Astabschluß

– T ein Tableau für M

– B ein Zweig in T

– ϕ, $\neg\psi$ Literale auf B

– σ MGU von ϕ, ψ

Dann ist

$$T' = T\sigma$$

ein Tableau für M.

Korrektheit/Vollständigkeit

Satz

Korrektheit:
Gibt es ein geschlossenes FV-Tableau für M,
dann ist M unerfüllbar.

Vollständigkeit:
Ist M unerfüllbar,
dann gibt es ein geschlossenes FV-Tableau für M.

Beweisskizze Vollständigkeit

Annahme (wird später bewiesen)

Grundterm-Version ist vollständig.

Beweisskizze

Dann ist (offenbar) folgende Variante von FV-Tableaus vollständig:

Ersetze Abschlußregel durch Substitutionsregel:

$$\frac{T}{T\sigma} \qquad \text{Substitutionsregel}$$

σ Grundsubst.

Vollständigkeit von FV-Tableaus mit Abschlußregel folgt dann mit folgendem Lemma:

Lifting-Lemma

Die in dem Beweis mit Substitutionsregel angewendete Substitution σ kann zerlegt werden in

$$\sigma = \rho \circ \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_1 \ ,$$

so daß die σ_i MGUs komplementärer Paare sind, mit denen alle Äste geschlossen werden können, und ρ eine beliebige Grundsubstitution.

Beweis der Korrektheit

Erfüllbarkeit eines Tableaus

Ein FV-Tableau T ist erfüllbar,
falls es eine Interpretation $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ gibt, so daß für alle Belegungen β auf wenigstens einem Zweig B von T gilt:
$\mathcal{D}, \beta \models B$.

Notation: $\mathcal{D} \models T$.

Beweis der Korrektheit

Geschlossene Tableaus sind unerfüllbar,
da jeder Zweig komplementäre Paare enthält.

Wir zeigen: Alle Tableaus für eine erfüllbare Formelmenge M sind erfüllbar.

Daraus folgt: Für eine erfüllbare Formelmenge kann es kein geschlossenes Tableau geben.

Sei also M eine erfüllbare, endliche, abgeschlossene Formelmenge (über Σ); und sei T ein Tableau für M.

M hat ein kanonisches Term-Modell $\mathcal{D}^*$ (über Σ^*).

Induktion über die für die Konstruktion von T notwendigen Regelanwendungen.

Induktionsbehauptung: $\mathcal{D}^*$ erfüllt T

Induktionsanfang: trivial

Induktionsschritt:

Zur Konstruktion von T' sind $n+1$ Regelanwendungen notwendig, T' wird durch eine Regelanwendung aus T konstruiert. Die Induktionsbehauptung gilt für T.

A) Erweiterungsregel.
Sei B ein Ast in T, und T' entstehe durch Regelanwendung auf ϕ und Erweiterung von B.

Sei β beliebige Variablenbelegung.

Es gilt $\mathcal{D}^*, \beta \models B_0$ für einen Ast B_0 von T.

Falls $B \neq B_0$ fertig, da dann B_0 Ast in T' und also $\mathcal{D}^*, \beta \models T'$.

Andernfalls gilt $\mathcal{D}^*, \beta \models B$.

ϕ ist von einem Typ $\alpha, \ldots, \delta$. Alle Fälle außer δ Routine bzw. wie in [Fitting, 1996].

Also: $\phi = \delta$ mit Frei$(\delta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
Sei B' der aus B entstandene Ast in T'.

Es reicht zu zeigen, daß $\mathcal{D}^*, \beta \models \delta_1(f_{[\delta]}(x_1, \ldots, x_n))$. Das folgt aber direkt aus dem Skolem-Lemma, da nach Voraussetzung $\mathcal{D}^*, \beta \models \delta$.

B) Abschlußregel.
Sei nun T' aus T durch Anwendung der Abschlußregel mit Substitution σ entstanden, d.h. $T' = T\sigma$.

Sei β' eine beliebige Variablenbelegung.

Sei die Variablenbelegung β definiert durch
$\beta(x) = \mathsf{val}_{I,\beta'}(\sigma(x))$.

Damit gilt $\mathsf{val}_{I,\beta'}(t\sigma) = \mathsf{val}_{I,\beta}(t)$.

Da $\mathcal{D}^*, \beta \models B$ für einen Ast B von T,
gilt $\mathcal{D}^*, \beta' \models B\sigma$.

$B' = B\sigma$ ist aber ein Ast in T' und also gilt
$\mathcal{D}^*, \beta' \models T'$.

Einschub

Der Begriff der Erfüllbarkeit von Tableaus

Unser Erfüllbarkeitsbegriff

Ein Tableau T ist erfüllbar,
falls es eine Interpretation $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ gibt, so daß
für alle Belegungen β auf wenigstens einem Zweig B
von T gilt:
$\mathcal{D}, \beta \models B$.

Erfüllbarkeitsbegriff nach Fitting

Ein Tableau T ist erfüllbar,
falls es für alle Grundsubstitutionen σ eine
Interpretation $\mathcal{D}_\sigma = \langle D, I \rangle$ gibt, so daß
für wenigstens einem Zweig $B\sigma$ von $T\sigma$ gilt:
$\mathcal{D}, \beta \models B\sigma$.