Normalformen

Eine Formel $A \in \mathsf{For}_\Sigma$ ist

in Negationsnormalform (NNF) falls:

– $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ in A nicht vorkommen,
– jedes Negationszeichen in A direkt vor einem Atom steht.

bereinigt falls:

– $\mathsf{Frei}(A) \cap \mathsf{Bd}(A) = \emptyset$,
– wenn QxB, $Q'x'B'$ verschiedene Unterformeln von A, dann $x \neq x'$.

in konjunktiver Normalform (KNF) falls:
A hat die Form

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j} \quad ,$$

wobei $L_{i,j}$ Literale sind.

Normalformen

Eine Formel $A \in \mathsf{For}_\Sigma$ ist

in Pränexnormalform (PNF) falls:
A hat die Form

$$A = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n B \quad ,$$

wobei

- $Q \in \{\forall, \exists\}$,
- $x_1, \ldots, x_n \in \mathsf{Var}$,
- B quantorenfrei.

B: **Matrix** von A,
$Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n$: **Präfix** von A.

in Skolemnormalform (SNF) falls:

- A ist geschlossen,
- A ist in Pränexnormalform,
- im Präfix von A sind nur universelle Quantoren,
- die Matrix von A ist in konjunktiver Normalform.

Normalformen: Existenz

Zu jedem $A \in \mathrm{For}_\Sigma$ gibt es Formeln

- B in Negationsnormalform,
- C bereinigt,
- D in Pränexnormalform,
- falls A quantorenfrei:
  E in konjunktiver Normalform,
- F in Skolemnormalform,

$B, \ldots, E$: logisch äquivalent zu A
F: erfüllbarkeitsäquivalent zu A

Größe der Formeln

Keine Äquivalenzen $\leftrightarrow$ in A:

$|B|, |C|, |D| \in \mathcal{O}(|A|)$

$|E|, |F| \in \mathcal{O}(2^{|A|})$

Äquivalenzen $\leftrightarrow$ in A:

$|C| \in \mathcal{O}(|A|)$

$|B|, |D|, |E|, |F| \in \mathcal{O}(2^{|A|})$.

Normalformen: Nachteile bei naivem Vorgehen

$$A \to \cdots \to F$$

1. Skolem-Symbole haben unnötig viele Argumente
2. Unnötig viele verschiedene Skolem-Symbole werden eingeführt
3. Potentiell exponentielle Vergrößerung der Formel bei Elimination der Äquivalenzen
4. Syntaktische Struktur der Formel geht bei Herstellung der KNF verloren.

Verbesserungen:

1. Skolemisierung ohne vorher PNF herzustellen.
2. Feste Zuordnung von Skolem-Symbolen zu δ-Formeln.
3. Definitorische (strukturerhaltende) KNF.

Verbesserte Skolemisierung

Term-Interpretation

Interpretation $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$ mit $D = \mathsf{Term}^0_\Sigma$

Spezielle Signatur

$[\phi]$: die Äquivalenzklasse aller bis auf Umbenennung freier Variablen mit ϕ identischen Formeln

Zu Signatur Σ sei Σ^* definiert durch:

$$\begin{aligned} F_0 &= F_\Sigma \\ F_n &= F_{n-1} \cup \{ f_{[\phi]} \mid \phi \in \mathsf{For}_{\Sigma^n} \} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N} \\ F_{\Sigma^*} &= \bigcup_{n \geq 0} F_n \\ P_{\Sigma^*} &= P_\Sigma \end{aligned}$$

Kanonische Interpretation

Eine Term-Interpretation $\mathcal{D}$ über Σ^* ist kanonisch, falls für alle Belegungen β, alle δ-Formeln δ über Σ^*:

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn } \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\delta) & = W \ , \\ \text{dann } \ \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\delta_1(f_{[\delta]}(x_1, \ldots, x_n))) & = W \ , \end{array}$$

wobei $\mathsf{Frei}(\delta) = \{x_1, \ldots, x_n\}$

Verbesserte Skolemisierung

Satz

Sei $\phi \in \mathsf{For}_\Sigma$ abgeschlossen und erfüllbar.

Dann hat ϕ ein kanonisches Modell $\mathcal{D}^*$.

Skolemisierung einer Unterformel

Sei

– A eine bereinigte Formeln in NNF über Σ^*,

– B eine Unterformel von A, die vom Typ δ ist,

– $\mathsf{Frei}(B) = \{y_1, \ldots, y_n\}$, und

– A' entstehe aus A,
indem B durch $\delta_1(f_{[B]}(y_1, \ldots, y_n))$ ersetzt wird.

Dann gilt für alle kanonischen Interpretationen $\mathcal{D}^*$ und alle Belegungen β:

$$\mathsf{val}_{\mathcal{D}^*,\beta}(A) = \mathsf{val}_{\mathcal{D}^*,\beta}(A') \quad .$$

Also:

Ist A erfüllbar, dann ist auch A' erfüllbar.

Beweis

Satz

Sei $\phi \in \mathrm{For}_\Sigma$ abgeschlossen und erfüllbar.

Dann hat ϕ ein kanonisches Modell $\mathcal{D}^*$.

Beweis

Sei $\mathcal{D}$ Term-Modell von ϕ.

Zur Definition von $\mathcal{D}^*$: ändere Bedeutung der $f_{[\phi]}$ (diese nicht in ϕ), verändere sonst nichts.

Definiere $rg : F_{\Sigma^*} \backslash F_\Sigma \to \mathbb{N}$:

$$rg(f_{[\psi]}) = \begin{cases} 0 & \psi \text{ nicht Typ } \delta \\ n & \text{sonst, wobei } n \text{ Schachtelungstiefe} \\ & \text{von } \delta\text{-Formeln in } \psi \end{cases}$$

Beweis (Forts.)

Definiere $(\mathcal{D}^n)_{n\geq 0}$ wobei Σ^n Beschränkung von Σ^* auf Symbole mit Rang $\leq n$.

Sei jeweils $f \in F_{\Sigma^n} \backslash F_{\Sigma}$.

$n = 0$: $I^0(f)$ beliebig.

$n > 0$: $f = f_{[\delta]}$, Frei$(\delta) = \{x_1, \ldots, x_k\}$
Für alle $b_1, \ldots, b_k \in D$:

Falls es β gibt mit $\beta(x_i) = b_i$ und $\mathcal{D}^n$, β erfüllt δ, wähle $c \in D$, so daß $\mathcal{D}^n$, β_x^c erfüllt $\delta_1(x)$ und setze $I^{n+1}(f)(b_1, \ldots, b_k) = c$.

Sonst $I^{n+1}(f)(b_1, \ldots, b_k)$ beliebig.

Die $\mathcal{D}^n$ approximieren ein $\mathcal{D}^*$, das offenbar kanonisch ist. ■

Einschub

Polarität einer Unterformel

Definition. Die **Polarität** des Auftretens einer Unterformel B in A ist
pol : For$_\Sigma$ $\times$ For$_\Sigma$ $\to \{+, -, \pm\}$ mit:

1. $\text{pol}(A, A) = +$
2. $\text{pol}(A, \neg A) = -$
3. $\text{pol}(B, A) = \text{pol}(B, s(A))$, falls $s(A)$ eine der durch uniforme Notation A zugeordneten Unterformeln ist und das Auftreten von B in $s(A)$ ist.
4. $\text{pol}(B, A_1 \leftrightarrow A_2) = \pm$

■

Definitorische KNF

So oft wie möglich:

Sei A eine bereinigte Formel; sei

$$B = Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n C \quad (n \geq 0)$$

eine möglichst kleine Unterformel von A, so daß

– direkt links von B kein weiterer Quantor steht,

– der primäre Operator von C binär ist;

und sei Frei$(B) = \{y_1, \ldots, y_m\}$.

Erweitere die Signatur von A um neues m-stelliges Prädikat p_B.

Ersetze alle Vorkommen von B in A durch $p_B(y_1, \ldots, y_m)$ und füge (konjunktiv)

$$\forall y_1 \cdots \forall y_m (p_B(y_1, \ldots, y_m) \circ B)$$

hinzu. Dabei ist

$$\circ := \begin{cases} \rightarrow & \text{wenn pol}(B, A) = + \\ \leftarrow & \text{wenn pol}(B, A) = - \\ \leftrightarrow & \text{wenn pol}(B, A) = \pm \end{cases}$$

Definitorische KNF

Resultat

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel der Form

$$Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k (C_1 \wedge \ldots \wedge C_l) \ ,$$

wobei in den C_i nicht mehr als zwei binäre Operatoren auftreten.

Damit möglich

Erfüllbarkeitsäquivalente Formel in SNF
mit quadratischem Aufwand berechenbar

Definitorische KNF: Beispiel

$$A = \forall w \exists x (p(w,x) \vee \overbrace{\boxed{\forall y (q(w,x,y) \wedge \exists z r(y,z))}}^{B})$$

Erste und einzige Ersetzung

$$\forall w \forall x (\boxed{p_B(w,x)} \to \boxed{\forall y (q(w,x,y) \wedge \exists z r(y,z))})$$

Polarität von B positiv.

Skolemisierung ohne PNF ergibt:

$$\forall w \forall x (p_B(w,x) \to \forall y (q(w,x,y) \wedge r(y, g(y))))$$

Berechne PNF und dann KNF:

$$\begin{aligned}\forall w \forall x \forall y ((\neg p_B(w,x) \vee q(w,x,y)) \wedge \\ (\neg p_B(w,x) \vee r(y,g(y))))\end{aligned}$$

A wird zu:

$$\forall w \exists x (p(w,x) \vee \boxed{p_B(w,x)})$$

Skolemisierung ohne PNF ergibt:

$$\forall w (p(w, h(w)) \vee p_B(w, h(w)))$$

Klauselnormalform: Notation

Gegeben eine Formeln in Skolemnormalform.

– Schreibe $\neg$ als $-$.

– Schreibe Disjunktionen (Klauseln) als Mengen von Literalen.

– Schreibe Konjunktion als Menge von Klauseln.

– Allquantoren werden nicht explizit hinschreiben.

$$\begin{aligned}&\{\{p(w_1, h(w_1)), p_B(w_1, h(w_1))\},\\ &\ \{-p_B(w_2, x_2), q(w_2, x_2, y_2)\},\\ &\ \{-p_B(w_3, x_3), r(y_3, g(y_3))\}\}\end{aligned}$$

– Fasse Klauseln als getrennt allquantifiziert auf, und

– verwende ggf. die gleichen Variablen in mehreren Klauseln.

$$\begin{aligned}&\{\{p(w, h(w)), p_B(w, h(w))\},\\ &\ \{-p_B(w, x), q(w, x, y)\},\\ &\ \{-p_B(w, x), r(y, g(y))\}\}\end{aligned}$$