Formalisierung in Prädikatenlogik
Ein Beispiel aus der Analysis

Nullstellen- bzw. Zwischenwertsatz:

Jede auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f muß den Wert 0 annehmen, falls $f(a) \leq 0$ und $f(b) \geq 0$.

Beweisidee

Betrachte das Supremum l der Menge

$$M = \{x \mid f(x) \leq 0, a \leq x \leq b\}$$

Zeige: $f(l) = 0$.

Formalisierungsidee

Axiomatisierung der totalen Ordnung auf den rellen Zahlen.

Einziges benötigtes Prädikat: '$\leq$'

Abkürzungen:

$x \in [a, b]$ gdw $a \leq x$ und $x \leq b$.

$x < y$ gdw $y \not\leq x$.

$x > y$ gdw $x \not\leq y$.

$x \geq y$ gdw $y \leq x$.

Formalisierung: Nullstellensatz

Dichte

Wenn $x < y$, dann gibt es z mit $x < z$ und $z < y$.

Rechtsseitige Stetigkeit, positive Funktionswerte

Sei $x \in [a, b]$ und $f(x) > 0$. Dann gibt es $\delta < x$, so daß für alle $\delta < y \leq x$ immer noch $f(y) > 0$ gilt.

Linksseitige Stetigkeit, negative Funktionswerte

Sei $x \in [a, b]$ und $f(x) < 0$. Dann gibt es $\delta > x$, so daß für alle $\delta > y \geq x$ immer noch $f(y) < 0$ gilt.

l ist obere Schranke von M

Wenn $l < x \leq b$, dann ist x nicht mehr in M,
d.h. $f(x) > 0$.
Kontraposition: für alle $x \in M$ ist $x \leq l$.

l ist kleinste obere Schranke

Für alle $x < l$ gibt es ein $\delta \in M$, das größer als x ist,
d.h.: für alle $x < l$ gibt es ein $x < \delta \leq b$, so daß $f(\delta) \leq 0$.

Randbedingungen

$a \leq b$, $f(a) \leq 0$, $f(b) \geq 0$.

Behauptung:

Es gibt ein ξ, so daß $0 \leq f(\xi) \leq 0$.

Eigenschaften der Formalisierung

Kompakte Axiomatisierung durch ausschließliche Verwendung von $\leq$

Alle Informationen werden im Beweis verwendet.

Spezielle Formalisierung erforderlich

Ohne die

- redundanzfreie Formulierung,
- die spezifische Formulierung der Stetigkeit,
- die Vorgabe der Beweisidee,

haben automatische Beweiser zur Zeit keine Chance.

```
% Intervalle und Randbedingungen
∀l,x,u((leq(l,x)∧leq(x,u))→in_iv(l,x,u))
leq(a,b)
leq(f(a),0)
leq(0,f(b))

% Totale Ordnung
∀x leq(x,x)
∀x,y(leq(x,y)∨leq(y,x))
∀x,y,z((leq(x,y)∧leq(y,z))→leq(x,z))

% Dichtheit
∀x,y(¬leq(y,x)→ ∃z(¬leq(z,x)∧¬leq(y,z)))

% Stetigkeit von f
∀x((in_iv(a,x,b)∧¬leq(f(x),0))→
    ∃δ(¬leq(x,δ)∧
       ∀y((¬leq(y,δ)∧leq(y,x))→¬leq(f(y),0))))

∀x((in_iv(a,x,b)∧¬leq(0,f(x)))→
    ∃δ(¬leq(δ,x)∧
       ∀y((¬leq(δ,y)∧leq(x,y))→¬leq(0,f(y)))))

% l ist Supremum von M
∀x((¬leq(x,l)∧leq(x,b))→¬leq(f(x),0))
∀x(¬leq(l,x)→∃δ(leq(δ,b)∧¬leq(δ,x)∧leq(f(δ),0)))


% Behauptung
∃ξ in_iv(0,f(ξ),0)
```

Metaresultate: Deduktionstheorem

Sei M eine Menge geschlossener Formeln.

Es gilt

$$M \models_{\Sigma} A$$

genau dann, wenn

$$M \cup \{\neg A\}$$

unerfüllbar ist

Speziell

Ist A geschlossen, dann gilt:

A ist allgemeingültig

genau dann, wenn

$\neg A$ is unerfüllbar

Metaresultate: Entscheidbarkeit

Aussagenlogik

Die Relation $\models$ ist *entscheidbar*

Erfüllbarkeit zu entscheiden, ist ein *NP-vollständig* Problem

Prädikatenlogik

Die Relation $\models$ ist in *unentscheidbar*

Die Menge der allgemeingültigen und die Menge der unerfüllbaren Formeln sind *rekursiv aufzählbar*

Die Menge der erfüllbaren Formeln ist *nicht aufzählbar*

Metaresultate: Satz von Herbrand

Annahme:

Die Menge der Terme ist nicht leer.

Herbrand-Interpretation

Interpretation $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$, so daß
– $D = \mathrm{Term}^0_\Sigma$ und
– $I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$
für alle $f \in F_\Sigma$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}^0_\Sigma$.

Herbrand-Interpretation, die ein Modell von M ist,
heißt Herbrand-Modell von M

Universelle Formel

Eine Formel der Form $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$,
wobei A quantorenfrei ist

Metaresultate: Satz von Herbrand

Satz von Herbrand

Eine Menge M geschlossener, universeller Formeln hat ein Modell

gdw

M hat ein Herbrand-Modell

gdw

Die Menge aller Grund-Instanzen
$A\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$ von Formeln $\forall x_1 \cdots \forall x_n A$
in M
hat ein Herbrand-Modell

Metaresultate: Kompaktheitssatz

Eine Formelmenge M hat ein Modell

gdw

alle endlichen Teilmengen von M haben ein Modell

Kombination:
Kompaktheitssatz/Satz von Herband

Eine Menge M geschlossener, universeller Formeln ist unerfüllbar

gdw

es gibt eine endliche Menge von Grund-Instanzen von Formeln in M, die unerfüllbar ist.