Warum gerade Prädikatenlogik?

Ausdrucksschwächere Logiken:

Aussagenlogik
z. B. zur Modellierung von Schaltkreisen

Temporale Aussagenlogik
z. B. zur Modellierung von Schaltwerken

Modale Aussagenlogiken

Ausdrucksstärkere Logiken:

Prädikatenlogik höherer Ordnung

Dynamische Logik

Prädikatenlogik: Syntax

Zusätzliche Sonderzeichen

„,“ „$\forall$“ „$\exists$“

Objektvariablen

Var $= \{x_0, x_1, \dots\}$

Signatur

Tripel $\Sigma = \langle F_\Sigma, P_\Sigma, \alpha_\Sigma \rangle$, wobei

- F_Σ abzählbare Menge von Funktionssymbolen
- P_Σ abzählbare, nichtleere Menge von Prädikatensymbolen
- $\alpha_\Sigma : F_\Sigma \cup P_\Sigma \to \mathbb{N}$ Stelligkeitsfunktion auf $F_\Sigma \cup P_\Sigma$

Terme

- Variablen $x \in$ Var sind Terme
- Wenn $f \in F_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(f) = n$ und $t_1, \dots, t_n$ Terme, dann ist $f(t_1, \dots, t_n)$ ein Term

Prädikatenlogik: Syntax

Grundterm

Term, der keine Variablen enthält

Unterterm

Ein Teilwort von t, das selbst Term ist,
ist Unterterm von t

Bezeichnungen

Var(t): die in t vorkommenden Variablen

Term$_\Sigma$: die Menge aller Terme (über Σ)

Term$^0_\Sigma$: die Menge aller Grundterme (über Σ)

Prädikatenlogik: Syntax

Atome

Wenn $p \in P_\Sigma$, $\alpha_\Sigma(p) = n$ und $t_1, \ldots, t_n$ Terme,
dann ist $p(t_1, \ldots, t_n)$ ein Atom.

Formeln

- <u>true</u>, <u>false</u> sind Formeln
- Atome sind Formeln
- Wenn A, $B \in \text{For}_\Sigma$, $x \in \text{Var}$,
  dann sind $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\forall x A$, $\exists x A$ Formeln

Literale

Ist A ein Atom, dann sind A und $\neg A$ Atome

Bezeichnungen

At_Σ: Menge der Atome (über Σ)

For_Σ: Menge der Formeln (über Σ)

Prädikatenlogik: Syntax

Skopus

In $\forall x A$, $\exists x A$ heißt A Skopus (Wirkungsbereich) des Quantors

Gebundene/freie Variablen

Ein Auftreten von x in A ist gebunden,
falls es im Skopus eines Quantors Qx liegt.

Ein Auftreten von x in A ist frei,
falls es nicht gebunden ist
(und auch nicht Teil des Quantors Qx)

Geschlossene Formel

Eine formel ist geschlossen (auch: ein Satz),
wenn sie keine freien Variablen enthält

Bezeichnungen

$\text{Bd}(A) = \{x \in \text{Var} \mid x \text{ tritt gebunden in A auf}\}$

$\text{Frei}(A) = \{x \in \text{Var} \mid x \text{ tritt frei in A auf}\}$

$\text{Var}(A) = \{x \in \text{Var} \mid x \text{ tritt in A auf}\}$

Prädikatenlogik: Uniforme Notation

Erweiterung der uniformen Notation für Aussagenlogik

Universelle Formeln γ-Formeln

$\forall x A$
$\neg \exists x A$

Existentielle Formeln δ-Formeln

$\neg \forall x A$
$\exists x A$

Zuordnungsregeln

γ	$\gamma_1(x)$
$\forall x A(x)$	$A(x)$
$\neg \exists x A(x)$	$\neg A(x)$

δ	$\delta_1(x)$
$\neg \forall x A(x)$	$\neg A(x)$
$\exists x A(x)$	$A(x)$

Prädikatenlogik: Semantik

Interpretation

Ein Paar $\mathcal{D} = \langle D, I \rangle$, wobei

- D eine beliebige nicht-leere Menge, das **Universum**
- I eine Interpretationsfunktion

  für $f \in F_\Sigma$: $I(f) : D^{\alpha(f)} \to D$

  für $p \in P_\Sigma$: $I(p) : D^{\alpha(p)} \to \{W, F\}$

Variablenbelegung

Eine Funktion $\beta : \mathsf{Var} \to D$

Modifikation von β bei x zu d:

$$\beta_x^d(y) = \begin{cases} d & \text{falls } x = y \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

Prädikatenlogik: Semantik

Auswertungsfunktion

Erweiterung von Interpretation und Variablenbelegung auf Formeln

$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(x) = \beta(x)$ für $x \in \mathsf{Var}$

$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(f(t_1,\ldots,t_n)) = I(f)(\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t_1),\ldots,\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t_n))$ für Terme $f(t_1,\ldots,t_n)$

$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(p(t_1,\ldots,t_n)) = I(p)(\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t_1),\ldots,\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(t_n))$ für Atome $p(t_1,\ldots,t_n)$

$$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\forall x A) = \begin{cases} W & \text{falls } \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \quad \text{für alle } d \in D \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\exists x A) = \begin{cases} W & \text{falls } \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta_x^d}(A) = W \quad \text{für (mindestens) ein } d \in D \\ F & \text{sonst} \end{cases}$$

$\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}$ ist für aussagenlogische Operatoren wie val_I definiert

Prädikatenlogik: Semantik

Modell

Eine Interpretation $\mathcal{D}$ (über Σ) ist Modell einer Menge M von Formeln (über Σ),
falls $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(A) = W$ für alle β und alle $A \in M$

Erfüllbar

M ist erfüllbar, falls es

- eine Interpretation $\mathcal{D}$ und
- eine Belegung β

gibt, so daß $\text{val}_{\mathcal{D},\beta}(M) = W$.

Semantische Folgerbarkeit

Eine Formel A ist semantisch folgerbar aus M,
falls jedes Modell von M auch Modell von A ist

Notation: $M \models_{\Sigma} A$

Prädikatenlogik: Semantik

Allgemeingültigkeit

A ist allgemeingültig,
falls alle Interpretationen Modell von A sind

Notation: $\models_\Sigma A$

Tautologie

Eine (prädikatenlogische) Formel A ist Tautologie,
falls es eine aussagenlogische Signatur Σ' gibt,
so daß A aussagenlogische Tautologie über Σ' ist.

Logische Äquivalenz

Zwei Formeln sind logisch äquivalent,
falls sie semantisch aus einander folgerbar sind

Erfüllbarkeitsäquivalenz

Zwei Formeln sind erfüllbarkeitsäquivalent,
falls sie entweder
– beide erfüllbar oder
– beide unerfüllbar
sind

Substitutionen

Substitution

Funktion $\sigma : \mathsf{Var} \to \mathsf{Term}_\Sigma$

<u>Schreibweise:</u>

$\{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$

wobei $\sigma(x) = \begin{cases} t_i & \text{if } x = x_i \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ x & \text{sonst} \end{cases}$

Fortsetzung auf Terme und Formeln

$\sigma(c) = c$

$\sigma(s(t_1, \ldots, t_n)) = s(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n))$, $s \in F_\Sigma \cup P_\Sigma$

$\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$

$\sigma(A \bullet B) = \sigma(A) \bullet \sigma(B)$, $\bullet \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

$\sigma(QxA) = Qx\sigma'(A)$
wobei $\sigma' = \sigma \backslash \{x \leftarrow t \mid t \in \mathsf{Term}_\Sigma\}$

$\sigma(\{A_1, \ldots, A_n\}) = \{\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)\}$

Substitutionen

Konkatenation von Substitutionen

$(\sigma \circ \tau)(x) = \sigma(\tau(x))$

Beachte: $\phi\sigma\tau = \phi(\tau \circ \sigma)$

Variablenumbenennung

Eine Substitution ist eine Variablenumbenennung, falls sie eine Permutation auf Var ist

Substitutionstheorem

Für alle Interpretationen $\mathcal{D}$, Variablenbelegungen β, Substitutionen σ, Terme t und Formeln A gilt, falls

$$\beta'(x) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(x)) \quad \text{für alle } x$$

– $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(t)) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta'}(t)$

– $\mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta}(\sigma(A)) = \mathsf{val}_{\mathcal{D},\beta'}(A)$

Gebundene Umbenennung
Komplementäres Paar

Gebundene Umbenennung einer Formel A

Alle Vorkommen einer Variablen

$$x \in \mathsf{Bd}(A), \quad x \notin \mathsf{Frei}(A)$$

werden durch

$$y \notin \mathsf{Var}(A)$$

ersetzt

Komplementäres Paar

Formeln A, B bilden ein komplementäres Paar, falls $\neg A$ durch gebundene Umbenennung aus B entsteht

Unifikation

Unifikator

T eine Menge von Termen

Eine Substitution σ ist Unifikator von T, falls

$$|\sigma(T)| = 1$$

Allgemeinster Unifikator (MGU)

μ is ein allgemeinster Unifikator von T, falls:

- μ ist Unifikator von T, und
- für alle Unifikatoren ν von T existiert eine Substitution ρ, so daß $\nu = \rho \circ \mu$.

Satz: Existenz des MGU

Ist $T \neq \emptyset$ unifizierbar,
dann gibt es einen idempotenten, allgemeinsten Unifikator von T

Dieser ist bis auf Variablenumbenennung eindeutig

Er kann in $\mathcal{O}(|T|)$ Schritten berechnet werden