

Übungsblatt 12

Grundbegriffe der Informatik — Winter 2023/24

Tutor*in:

Tutorium Nr.:

Nach-,Vorname:

Matr.nr.:

| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | |
|--|--|--|--|--|--|--|

Ausgabe:

6. Februar 2023, 14:30 Uhr

Abgabe:

16. Februar 2024, 12:30 Uhr

Bitte beachten Sie die Hinweise auf der letzten Seite.

*Von Tutor*in auszufüllen:*

Blatt 12:

| | |
|--|------|
| | / 19 |
|--|------|

Blätter 1 – 12:

| | |
|--|-------|
| | / 240 |
|--|-------|

Aufgabe 1 - Sein oder nicht sein? (5 Punkte)

Beantworten Sie für alle $i \in \{1, \dots, 6\}$, ob die Relation R_i auf der Menge M_i jeweils eine Äquivalenzrelation, eine Halbordnung, eine Totalordnung oder nichts davon ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Falls R_i eine Äquivalenzrelation ist, geben Sie zusätzlich eine Abbildung $f_i: M_i \rightarrow M_i$ an, die nicht die Identität ist, aber mit R_i verträglich.

a) $R_1 = \emptyset, M_1 = \mathbb{N}_0$ (0.5 Punkte)

b) $R_2 = \{(x, y) \mid \text{ggT}(x, y) = 1\}, M_2 = \mathbb{N}_+$ (0.5 Punkte)

Dabei ist der größte gemeinsame Teiler $\text{ggT}(x, y)$ von $x, y \in \mathbb{N}_+$ die größte natürliche Zahl, die sowohl x als auch y teilt.

c) $R_3 = \{(x, y) \mid x^2 + x = y^2 + y\}, M_3 = \mathbb{R}$. (1 Punkt)

d) $R_4 = E^*, M_4 = V$ wobei E die Kantenmenge und V die Knotenmenge eines azyklischen gerichteten Graphen G sind. (1 Punkt)

e) $R_5 = \{(n, m) \mid n = m^k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_+\}, M_5 = \mathbb{N}_+$ (1 Punkt)

f) $R_6 = \{(w_1, w_2) \mid w_1 \text{ und } w_2 \text{ haben ein gemeinsames Teilwort } w \neq \varepsilon\},$
 $M_6 = \{a, b, c\}^*$ (1 Punkt)

Aufgabe 2 - Turnier (5 Punkte)

Die GBI veranstaltet ihr alljähriges Turnier im Beweisbaumstammweitwurf. Dabei treten in einer Runde genau zwei Teilnehmer gegeneinander an. Die Ergebnisse aller Runden werden in einer Relation \prec_0 auf der Menge $T = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$ der Teilnehmer festgehalten:

$$\prec_0 = \{(\alpha, \beta), (\beta, \eta), (\alpha, \gamma), (\gamma, \eta), (\beta, \delta), (\delta, \eta), (\alpha, \delta), (\gamma, \delta)\}$$

Dabei ist $a \prec_0 b$ für $a, b \in T$ genau dann, wenn a die Runde gegen b verloren hat. Leider wurden die Ergebnisse sehr unübersichtlich festgehalten. Das ganze Turnier wird auch dadurch erschwert, dass manche Teilnehmer abseits der festgelegten Runden einander herausfordern und dadurch weitere Ergebnisse erzeugen. Wer hat nun das Turnier gewonnen?

- a) Die Relation \prec_0 ist keine Halbordnung. Welche Tupel müssen \prec_0 hinzugefügt werden, damit die resultierende Relation \preceq eine Halbordnung ist? (1 Punkt)

- b) Zeichnen Sie das Hassediagramm zu \preceq auf T . Geben Sie außerdem alle maximalen und minimalen Elemente an, sowie, falls sie existieren, das kleinste und das größte Element. (2 Punkte)

Einige Agenten, denen das Aufstellen des Hassediagramms zu lange dauert, haben aus Langeweile weitere Runden gestartet. Sie haben die Ergebnisse in einer Relation \sqsubset_0 festgehalten und plädieren nun dafür, den Gewinner des Turniers als größtes Element der Relation $\sqsubset_0 \circ \prec_0$ zu bestimmen.

$$\sqsubset_0 = \{(\delta, \gamma), (\eta, \beta)\}$$

- c) Zeichnen Sie den Graphen $(T, \sqsubset_0 \circ \prec_0)$. Kann auch $\sqsubset_0 \circ \prec_0$ um weitere Tupel zu einer Halbordnung auf T ergänzt werden? Falls ja, geben Sie diese Tupelmengung an. Ansonsten begründen Sie, warum nicht. (2 Punkte)

Aufgabe 3 - Finde den Fehler (4 Punkte)

Behauptung: Jede binäre Relation \sim , die symmetrisch und transitiv ist, ist auch reflexiv und damit eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Sei M eine nicht-leere Menge und sei $\sim \subseteq M \times M$ eine symmetrische und transitive Relation auf M . Seien zudem $x, y \in M$ so, dass $x \sim y$. Da \sim symmetrisch ist, gilt auch $y \sim x$. Wegen der Transitivität von \sim folgt aus $x \sim y$ und $y \sim x$, dass auch $x \sim x$ gilt, also ist \sim reflexiv.

Hier ist etwas faul, denn: Diese Behauptung ist falsch.

- a) Geben Sie eine Relation auf $\{a, b, c\}$ an, die zwar symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv ist. Begründen Sie kurz, warum Ihre Relation nicht reflexiv ist. (1 Punkt)
- b) Beschreiben Sie, wo der Fehler im obigen „Beweis“ liegt und warum dieser nicht die Behauptung beweist. (2 Punkte)
- c) Welche (schwächere) Aussage zeigt der Beweis stattdessen? (1 Punkt)

Aufgabe 4 - Schweinelatein (5 Punkte)

Weil die hartnäckige GBI ihm zunehmend Probleme bereitet, beschließt Dr. Meta vorbeugend, die Kommunikation mit seinen Gehilfen sicherer zu gestalten und sämtliche Nachrichten zu verschlüsseln. Da er vermutet, dass die meisten von lateinischen Texten abgeschreckt werden, bemüht er sich dabei, dass

verschlüsselte Nachrichten möglichst Latein ähneln. Außerdem muss die Verschlüsselung schnell gehen, denn Dr. Meta hat viele Nachrichten zu verschicken!

Gegeben sei das deutsche Alphabet ohne Umlaute $A = \{a, b, \dots, z\}$.

Um ein Wort $w \in A^+$ gemäß dem hochkomplizierten und raffinierten Verfahren von Dr. Meta zu verschlüsseln, wird zunächst das erste Zeichen von w gelöscht und an das Ende von w angefügt. Das Ergebnis wird anschließend um das Suffix `us` ergänzt. So wird zum Beispiel aus dem Wort `code` das verschlüsselte Wort `odecus`.

- a) Geben Sie das Ergebnis der Verschlüsselung für die Wörter `doktor` und `meta` an. (1 Punkt)
- b) Geben Sie eine Turingmaschine an, deren Lesekopf sich in jedem Schritt nach rechts bewegt und die für ein Wort aus A^+ dessen Verschlüsselung berechnet. Ihre Turingmaschine darf dabei nicht mehr als 75 Zustände haben!

Den Tutor*innen zuliebe geben Sie Ihre Turingmaschine nicht graphisch sondern als Tupel an. (4 Punkte)

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Lösungen **müssen** handschriftlich erstellt werden
- Ihre Abgabe sollte die erste Seite dieser Datei als Deckblatt haben
- Ihre Abgabe muss **rechtzeitig** erfolgen

Außerdem, wenn Sie Ihre Ausarbeitung über die Abgabekästen im Keller des Informatik-Gebäudes abgeben:

- Ihre Abgabe muss in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet werden
- Tablet-Ausdrucke sind zulässig

Wenn Sie Ihre Ausarbeitung online über ILIAS abgeben, dann achten Sie darauf:

- Ihre Abgabe muss **genau eine** PDF-Datei sein
- Scans und lesbare Fotos sind zulässig
- Abgabe erfolgt unter „Tutorien“ im Ordner **Ihres** Tutoriums