Lösungsvorschläge und Erläuterungen

Klausur zur Vorlesung
Grundbegriffe der Informatik
21. August 2023

Nachname:	
Vorname:	
Matr.-Nr.:	

INF
Erläuterung
siehe unten

Diese Klausur ist mein ☐ 1. Versuch ☐ 2. Versuch in GBI

E-Mail-Adr.:	

nur falls 2. Versuch

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7
erreichbare Punkte	11	8	10	7	9	7	8
erreichte Punkte							

Gesamtpunktzahl:			Note:	

INF = Klausur-Version mit 6 LP: Studiengang Informatik, Wirtschaftsinformatik, Wirtschaftsingenieurwesen, Bauingenieurwesen, Mathematik, Technomathematik, Lehramt

PH/GEO = Klausur-Version mit 4 LP: Physik, Geodäsie und Geoinformatik

Wichtige Hinweise

- Stellen Sie sicher, dass Sie die richtige Version der Klausur erhalten haben (INF oder PH/GEO auf der Titelseite)!

- Stellen Sie sicher, dass Ihre Klausur 16 Blätter umfasst.

- Lesen Sie die Aufgaben sorgfältig durch!

- Tragen Sie *nach der Einlesezeit* Ihren Vornamen, Nachnamen und Ihre Matrikelnummer auf dem Titelblatt ein! Tragen Sie Ihre Matrikelnummer auch auf jedem Blatt ein!

- Wenn Sie Ihre Antwort nicht direkt bei der Aufgabenstellung aufschreiben, vermerken Sie unbedingt, wo Ihre Lösung steht.

- Sie können die Leerseiten und das angehängte freie Blatt für Antworten nutzen, falls der Platz bei der Aufgabenstellung nicht ausreicht.

  Sie können den Platz auch für Notizen, Skizzen etc. nutzen.

  Kennzeichnen Sie deutlich, welche Angaben bewertet werden sollen!

- Weiteres Leerpapier erhalten Sie bei Bedarf auf Nachfrage von der Aufsicht.

- Bitte bleiben Sie bis zum Ende der Bearbeitungszeit am Platz.

- Aufsichtspersonen können nur organisatorische und keine inhaltlichen Fragen beantworten.

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11 Punkte)

/ 11

a) Binäre Operationen

1) Sei P eine beliebige nicht-leere Menge, und $\bullet : P \times P \to P$ eine infix notierte binäre Operation. Geben Sie formale Definitionen für die beiden folgenden Aussagen an: /1

   i. Die Operation $\bullet$ ist kommutativ.

   ii. Die Operation $\bullet$ ist assoziativ.

2) Wir betrachten die infix notierte binäre Operation /2

$$\star : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \ .$$

Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\star$ assoziativ ist.

3) Für Mengen A und B sei nun $f : A \to B$ eine bijektive Funktion, sowie $\diamond : A \times A \to A$, $\square : B \times B \to B$ infix notierte binäre Operationen. Es gelte /2

$$f(x \diamond y) = f(x) \square f(y)$$

und $\square$ sei kommutativ. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\diamond$ kommutativ sein muss.

b) Für $k \in \mathbb{N}_+$ ist $f_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$$f_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k \ .$$

/2

1) Zeigen Sie: $f_k(n) \in O(n^{k+1})$.

/2

2) Zeigen Sie: $f_k(n) \in \Omega(n^{k+1})$.
Es genügt, die Aussage für gerade $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

/2

3) Widerlegen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt $n^a \in O(b^n)$

Lösung 1

a) 1) i. Für alle $x, y \in P$ gilt: $x \bullet y = y \bullet x$

ii. Für alle $x, y, z \in P$ gilt: $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
(Wahlweise auch mit $\forall$ statt „für alle", auch wenn nicht unserer Syntax von Prädikatenlogik entspricht.

2) $\star$ ist assoziativ, da

$$\begin{aligned}(x \star y) \star z &= \sqrt{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ &= \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{y^2+z^2}\right)^2} = x \star (y \star z) \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

3) $\diamond$ ist kommutativ, da

$$f(x \diamond y) \overset{\text{Vor.}}{=} f(x) \square f(y) \overset{\square \text{ ist komm.}}{=} f(y) \square f(x) \overset{\text{Vor.}}{=} f(y \diamond x)$$

Da f bijektiv ist, gibt es eine Umkehrfunktion f^{-1} mit $f^{-1} \circ f = id_A$. Mit der Gleichheit von oben gilt:

$$x \diamond y = f^{-1}(f(x \diamond y)) = f^{-1}(f(y \diamond x)) = y \diamond x$$

b) 1) Wenn man jedes Summenglied nach oben durch n abschätzt, erhält man:

$$f_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k \le \sum_{j=1}^{n} n^k = n^{k+1}$$

2) Da wir n gerade annehmen dürfen, ist $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}_0$. Wenn man die Summenglieder ab $\frac{n}{2}$ durch $\frac{n}{2}$ nach unten abschätzt, und die davor durch 0, so erhält man

$$\begin{aligned}f_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k &= \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} j^k + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} j^k \\ &\ge \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} 0 + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n} \left(\frac{n}{2}\right)^k \\ &\ge 0 + \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^k = \left(\frac{n}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot n^{k+1}\end{aligned}$$

3) Ein Gegenbeispiel ist zum Beispiel $a = 1, b = \frac{1}{2}$. Während n^1 mit wachsendem n unbeschränkt wächst, konvergiert $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ gegen 0.

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

Aufgabe 2: Prädikatenlogik (6 + 2 = 8 Punkte)

/ 8

Sei die Signatur (V, F, C, R, ar) gegeben mit

$$V = \{x, y, z\}, \quad C = \emptyset, \quad F = \{v, m\}, \quad R = \{G\},$$
$$ar(v) = ar(m) = 1, \ ar(G) = 2 \ .$$

Wir betrachten die Interpretation (D, I), in der D die Menge aller Menschen in Karlsruhe ist und $I(v)(x) \in D$ der biologische *Vater* und $I(m)(x) \in D$ die biologische *Mutter* von $x \in D$ sind. $(x, y) \in I(G)$ ist genau dann der Fall, wenn $x \in D$ und $y \in D$ *Geschwister* sind.

Formalisieren Sie folgende Aussagen in Prädikatenlogik:

/6

a) Zwei beliebige Menschen sind genau dann Geschwister, wenn sie denselben Vater und dieselbe Mutter haben.

b) Es gibt einen Menschen, dessen Großväter Geschwister sind.

c) Kein Mensch ist gleichzeitig sowohl Mutter als auch Vater.

d) Die Geschwister-Relation ist symmetrisch.

/2

e) Sei nun im Folgenden P ein einstelliges Relationssymbol. Es sei das Universum $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gegeben. Geben Sie zwei verschiedene Belegungen $J_1(P)$ und $J_2(P)$ des Prädikatensymbols P an, so dass (U, J_1) und (U, J_2) Modelle der Formel

$$\forall z\big((\exists x\ P(x)) \rightarrow P(z)\big)$$

sind.

$J_1(P) =$

$J_2(P) =$

Lösung 2

a)

$$\forall x \forall y \big(G(x,y) \ \leftrightarrow \ v(x) = v(y) \land m(x) = m(y)\big)$$

b)

$$\exists x \ G\big(v(v(x)), v(m(x))\big)$$

c)

$$\forall x((\exists y \ v(y) = x) \rightarrow \neg(\exists y \ m(y) = x))$$

d)

$$\forall x \forall y. \ G(x,y) \leftrightarrow G(y,x) \qquad \text{oder auch} \qquad \forall x \forall y. \ G(x,y) \rightarrow G(y,x)$$

e)

$$J_1(P) = \{\alpha, \beta, \gamma\} \qquad\qquad J_2(P) = \{\}$$

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 3: Zahldarstellungen und Sprachen (1 + 1 + 3 + 2 + 3 = 10 Punkte)

/ 10

Zur Erinnerung: Sei $Z_2 = \{0, 1\}$. Die Funktion $\mathrm{Num}_2 : Z_2^* \to \mathbb{N}_0$ wurde in der Vorlesung induktiv definiert als

$$\begin{aligned}
\mathrm{Num}_2(w1) &= 2 \cdot \mathrm{Num}_2(w) + 1 \\
\mathrm{Num}_2(w0) &= 2 \cdot \mathrm{Num}_2(w) \\
\mathrm{Num}_2(\varepsilon) &= 0
\end{aligned}$$

a) Geben Sie eine Bedingung an $n \in \mathbb{N}_0$ an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass $2n + 1$ durch 5 teilbar ist.

/1

b) Sei $w \in Z_2^*$. Geben Sie eine Bedingung an $\mathrm{Num}_2(w)$ an, die notwendig und hinreichend dafür ist, dass $\mathrm{Num}_2(w0)$ **mod** $5 = 3$ ist.

/1

c) Geben Sie einen endlichen Akzeptor A über dem Alphabet Z_2 an, der die Sprache

/3

$$L(A) = \left\{ w \in Z_2^* \mid w \text{ ist das leere Wort oder } \mathrm{Num}_2(w) \text{ ist durch 5 teilbar} \right\}$$

akzeptiert. Der Automat soll genau fünf Zustände besitzen.

Hinweis: Erinnern Sie sich an das Konzept der Äquivalenzklassen für den Rest bei der Division durch 5 und nutzen Sie die Erkenntnisse aus a) und b).

/2

d) Betrachtet wird die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b, c\}, S, P)$ mit

$$P = \left\{ S \to ab \mid b \mid T, \quad T \to aSS \right\} .$$

Geben Sie eine Ableitung für das Wort $w = ababab$ in G an.

/3

e) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik über dem Alphabet $A = \{a, b\}$ an für die Sprache

$$L = \{w \in A^* \mid N_a(w) = N_b(w)\} .$$

Die Grammatik soll höchstens drei Nichtterminalsymbole besitzen. (Sie müssen **keine** Begründung dafür angeben, warum die Grammatik die gesuchte Eigenschaft besitzt.)

Lösung 3

a)

$$n \bmod 5 = 2 \qquad \text{oder} \qquad n \equiv 2 \pmod 5$$

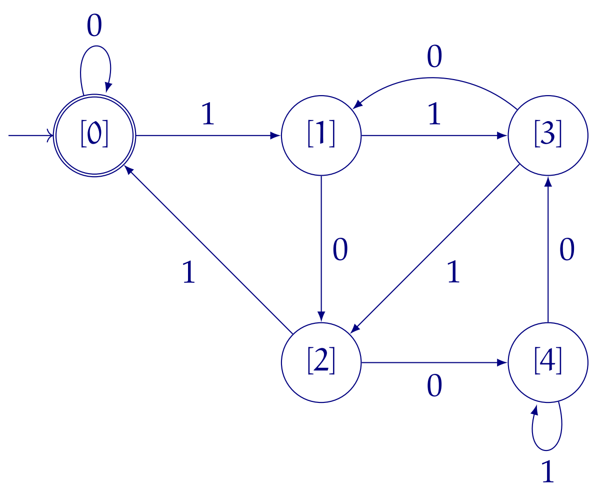
oder „n muss beim Teilen durch 5 den Rest 2 ergeben“.

b)

$$\mathrm{Num}_2(w) \bmod 5 = 4 \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Num}_2(w) \equiv 4 \pmod 5$$

oder „$\mathrm{Num}_2(w)$ muss beim Teilen durch 5 den Rest 4 ergeben“.

c)



d)

$$\underline{S} \Rightarrow \underline{T} \Rightarrow a\underline{S}S \Rightarrow ab\underline{S} \Rightarrow ab\underline{T} \Rightarrow aba\underline{S}S \Rightarrow abab\underline{S} \Rightarrow ababab$$

(Das unterstrichene Nichtterminal wird jeweils im nächsten Ableitungsschritt ersetzt.)

e) Zum Beispiel: $G_e = (\{S\}, \{a, b\}, S, \{S \to SS \mid aSb \mid bSa \mid \varepsilon\})$

Es gibt aber viele andere Grammatiken, die diese Eigenschaft auch haben.

Nicht gefordert, nur der Vollständigkeit halber: Beweis für $L(G_e) = L$

1. $L \subseteq L(G_e)$

Für $w = c_1c_2 \dots c_n \in A^*$ mit $c_i \in A$ bildet die Hilfsfunktion $s(w) = Sc_1Sc_2S \dots Sc_nS$ das Wort w auf eines ab, bei dem zwischen zwei Zeichen je noch das Startnichtterminal S steht.

Behauptung: $S \Rightarrow^* s(w)$ für alle $w \in L$. Beweis der Behauptung über vollst. Induktion über die Länge n der Wörter in $w \in L$. Diese haben immer gerade Länge!

Induktionsanfang $n = 0; w = \varepsilon$**:** $S \Rightarrow^* S$ offensichtlich in 0 Schritten.

Induktionssschritt $n \rightsquigarrow n + 2$**:** Sei $w \in l$ mit $|w| = n + 2$. Dann gibt es oBdA† $w_1, w_2 \in A^*$ mit $w_1 ab_w = w$. Für $w' = w_1 w_2 \in L$ ist $|w'| = n$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $S \Rightarrow^* s(w')$. Durch zwei weitere Anwendungen von $S \to SS$ erhält man $S \Rightarrow^* s(w_1)Ss(w_2) \Rightarrow s(w_1)aSbs(w_2) = s(w)$.

Es gilt $s(w) \Rightarrow^* w$, da $S \to \varepsilon$ auf jedes Vorkommnen von S angewendet werden kann.

Insgesamt ist $L \subseteq L(G_e)$.

2. $L(G_e) \subseteq L$

Für jedes ableitbare Wort $w \in (A \cup \{S\})$ mit $S \Rightarrow^* w$ gilt, dass $N_a(w) = N_b(w)$. Das liegt daran, dass die Produktionen, die a und b einführen diese immer paarweise einführen. Formal kann dies als Induktionsbeweis über der Länge der Ableitung gezeigt werden.

† Dies ist „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“: Es muss einen Wechsel ab oder ba innerhalb von w geben. Der Fall für ba ist vollkommen analog zu dem hier dargelegten Fall für ab.

Aufgabe 4: Vollständige Induktion (1 + 5 + 1 = 7 Punkte) / 7

Gegeben ist ein beliebiges Alphabet A, das die Symbole a und b enthält. Sie können in Ihrer Lösung „Kantorowitsch-Baum“ als „K-Baum“ abkürzen. Sie können die Notation $h(r) \in \mathbb{N}_0$ für „die Höhe des Kantorowitsch-Baumes des regulären Ausdrucks r“ verwenden.

> **Behauptung 1:** Für jeden regulären Ausdruck R über A, der keinen Kleene-Stern $*$ enthält, ist die beschriebene Sprache $L(R)$ eine endliche Menge.

a) Zeichnen Sie den Kantorowitsch-Baum für den regulären Ausdruck `(a|∅)(ba)` . /1

b) Beweisen Sie Behauptung 1 mit (starker) vollständiger Induktion über der Höhe von Kantorowitsch-Bäumen von regulären Ausdrücken **oder** mit struktureller Induktion über reguläre Ausdrücke. /5

/1

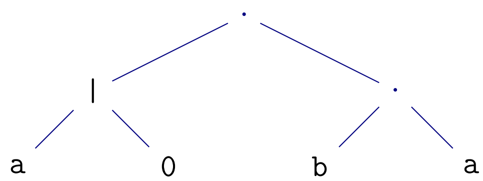
c) Die umgekehrte Aussage in Behauptung 2 gilt nicht.

> **Behauptung 2:** Für jeden regulären Ausdruck R über A, der den Kleene-Stern $*$ enthält, ist die beschriebene Sprache $L(R)$ eine unendliche Menge.

Geben Sie als Gegenbeispiel einen regulären Ausdruck an, der $*$ enthält und doch eine endliche Sprache beschreibt.

Lösung 4

a)



b) Vollständige Induktion über der Höhe h der K-Bäume.

Induktionsanfang $h = 0$: Audrücke mit K-Baum-Höhe 0 sind entweder ein einzelnes Symbol $\mathtt{a} \in A$ oder das Symbol $\mathtt{\emptyset}$. Es gilt: $L(\mathtt{a}) = \{\mathtt{a}\}$ und $L(\mathtt{\emptyset}) = \varnothing$. Dies sind jeweils endliche Mengen.

Induktionsschritt $\leq h \rightsquigarrow h+1$:

Induktionshypothese: Alle regulären Ausdrücke ohne Kleene-Stern mit K-Baum-Höhe $k \leq h$ beschreiben eine endliche Sprache.

Sei R ein beliebiger regulärer Ausdruck mit K-Baum-Höhe $h+1$. Dann ist $R = (R_1 R_2)$ (Konkatenation) oder $R = (R_1 \,|\, R_2)$ (nichtdet. Auswahl), wobei einer der K-Bäume von R_1 oder R_2 die Höhe h hat und der andere K-Baum eine Höhe kleiner oder gleich h. Damit gilt nach Induktionsannahme (der starken Induktion), dass $L(R_1)$ und $L(R_2)$ endlich sind.

Für $R = (R_1 R_2)$ gilt: $L(R) = L(R_1) \cdot L(R_2)$. Die Konkatenation endlicher Sprachen ist aber wieder eine endliche Sprache.

Für $R = (R_1 \,|\, R_2)$ gilt: $L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$. Die Vereinigung zweier endlicher Mengen ist aber auch eine endliche Menge.

Insgesamt ist $L(R)$ in jedem Fall eine endliche Menge.

Alternative Lösung mit strukturelle Induktion:

Induktionsanfang:
- Für $\mathtt{a} \in A$ gilt: $L(\mathtt{a}) = \{\mathtt{a}\}$ endlich
- Für $\mathtt{\emptyset}$ gilt: $L(\mathtt{\emptyset}) = \varnothing$ endlich

Induktionsschritt Für R_1, R_2 regulär gilt nach Induktionsannahme dass $L(R_1)$ und $L(R_2)$ endlich sind.

- Für $R = (R_1 R_2)$ ist $L(R) = L(R_1) \cdot L(R_2)$. Die Konkatenation endlicher Mengen ist wieder endlich.
- Für $R = (R_1 \,|\, R_2)$ ist $L(R) = L(R_1) \cup L(R_2)$. Die Vereinigung endlicher Mengen ist wieder endlich.

c) Der Ausdruck $\mathtt{\emptyset *}$ enthält den Kleene-Stern, aber es gilt: $L(\mathtt{\emptyset *}) = \varnothing$.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 5: Codierungen (1 + 1 + 1 + 1 + 4 + 1 = 9 Punkte)

/ 9

Seien $f^{**}, g^{**} : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^* \to \{0, 1\}^*$ ε-freie Homomorphismen induziert durch die Funktionen $f, g : \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\} \to \{0, 1\}^*$. Dabei sei f gegeben durch

x	a	b	c
$f(x)$	001	10	1

und es gelte

$$f^{**}(\mathtt{abc}) = g^{**}(\mathtt{acb}) \quad (1)$$
$$f^{**}(\mathtt{ccac}) = g^{**}(\mathtt{cac}) \ . \quad (2)$$

a) Geben Sie $f^{**}(\mathtt{abc})$ und $f^{**}(\mathtt{ccac})$ an. /1

$f^{**}(\mathtt{abc}) =$ ______________________________

$f^{**}(\mathtt{ccac}) =$ ______________________________

b) Welche Werte kann $g(\mathtt{a})$ annehmen, damit (1) eine Lösung hat? /1

c) Welche Werte kann $g(\mathtt{a})$ annehmen, damit (2) eine Lösung hat? /1

d) Geben Sie $g^{**}(\mathtt{abc})$ an. /1

/4

e) Die Funktion f^{**} ist eine Codierung, d.h., es gibt eine Umkehrfunktion $h : \{0,1\}^* \to \{a,b,c\}^*$ mit $h \circ f^{**} = id_{\{a,b,c\}^*}$.

Da f nicht präfixfrei ist, muss ein Wort $v \in \{a,b,c\}^*$, dessen Codewort $w = f^{**}(v)$ mit 1 beginnt, nicht notwendigerweise mit c beginnen. Wenn das Codewort w aber mit 11 beginnt, muss das erste Symbol von v ein c sein.

Geben Sie vier induktive Bedingungen an, die für h gelten müssen und vervollständigen Sie dazu die folgenden Zeilen. Die erste Zeile zeigt die induktive Bedingung für die Aussage des letzten Absatzes:

- $h(11w) = c \cdot h(1w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w) = \_\_\_\_\_ \cdot h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w) = \_\_\_\_\_ \cdot h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w) = \_\_\_\_\_ \cdot h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w) = \_\_\_\_\_ \cdot h(\_\_\_\_\_\_\_\_ w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$

Damit Sie nicht umblättern müssen hier noch einmal die Definition der Funktion f:

x	a	b	c
$f(x)$	001	10	1

/1

f) Geben Sie ein Wort $w_f \in \{0,1\}^*$ an, für das es mehr als einen möglichen Wert als Funktionswert $h(w_f)$ gibt (und h doch Umkehrfunktion von f^{**} bleibt).

Warum gibt es solche Wörter w_f?

Lösung 5

a) $f^{**}(\texttt{abc}) = \texttt{001101}$, $f^{**}(\texttt{ccac}) = \texttt{110011}$

b) Mögliche Werte für $g(\texttt{a})$ in (1) sind 0, 00, 001, und 0011.

c) Mögliche Werte für $g(\texttt{a})$ in (2) sind 00 und 1001.

d) Die letzten beiden Aufgaben ergeben dass $g(\texttt{a}) = 00$ und damit mit (2), dass $g(\texttt{c}) = 11$. Wenn man dies in (1) einsetzt, erhält man $g(\texttt{b}) = 01$. Insgesamt:

$$g^{**}(\texttt{abc}) = 00\,01\,11$$

e)

- $h(11w) = \mathtt{c} \cdot h(1w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(1001w) = \mathtt{ca} \cdot h(w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(1000w) = \mathtt{b} \cdot h(00w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(101w) = \mathtt{b} \cdot h(1w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$
- $h(001w) = \mathtt{a} \cdot h(w)$ für alle $w \in \{0,1\}^*$

f) z.B. 000. 000 liegt nicht im Bild von f^{**}, daher spielt es keine Rolle, wie $h(000)$ gewählt wird; es hat für die Eigenschaft als Umkehrabbildung keine Auswirkung.

Solche Wörter gibt es, da f^{**} nicht surjektiv ist.

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 6: Graphen (1 + 1 + 2 + 3 = 7 Punkte)

/ 7

Jede Relation R über einer endlichen Menge M mit $|M| = n$ kann als gerichteter Graph $G = (M, R)$ interpretiert werden, in dem eine Kante von einem Element $a \in M$ zu einem Element $b \in M$ genau dann existiert, wenn $(a, b) \in R$.

a) Zeichnen Sie den Graphen $G_a = \big(\{1, 2, 3\}, \leq\big)$.

/1

b) Sei nun A die Adjazenzmatrix von $G = (M, R)$. Welche Eigenschaft gilt für die Einträge a_{ij} (für $1 \leq i, j \leq n$) der Matrix A, wenn ...

/1

1) ... die Relation R reflexiv ist?

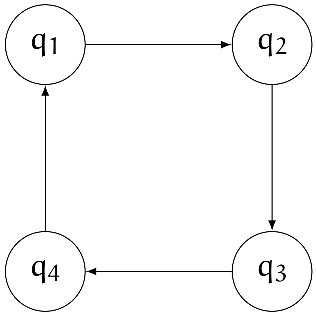
2) ... die Relation R symmetrisch ist?

c) Wie viele Relationen, die sowohl reflexiv als auch symmetrisch sind, gibt es über M (für $|M| = n$)?
Begründen Sie.

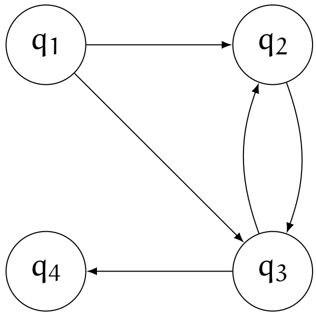
/2

/3

d) Für diese Teilaufgabe ist die Menge $M_d = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ festgelegt. Für die beiden Graphen $H_1 = (M_d, R)$ und $H_2 = (M_d, S)$ sind die binäre Relationen $R, S \subseteq M_d^2$ durch die folgenden Darstellungen festgelegt:

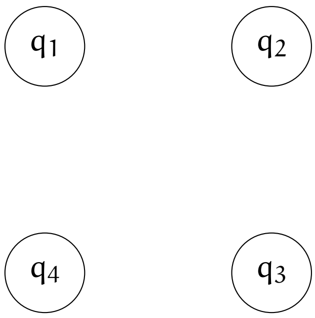


$H_1 = (M_d, R)$



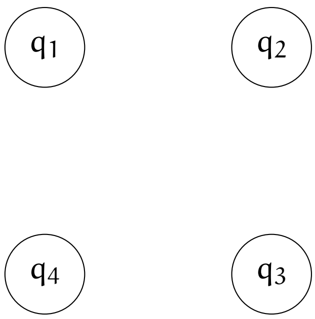
$H_2 = (M_d, S)$

1) Ergänzen Sie den folgenden Graphen zu $H_3 = (M_d, \mathbf{R} \cap \mathbf{S})$:



$H_3 = (M_d, R \cap S)$

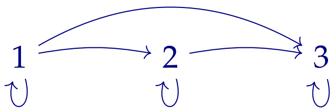
2) Ergänzen Sie den folgenden Graphen zu $H_4 = (M_d, \mathbf{R} \circ \mathbf{S})$:



$H_4 = (M_d, R \circ S)$

Lösung 6

a)



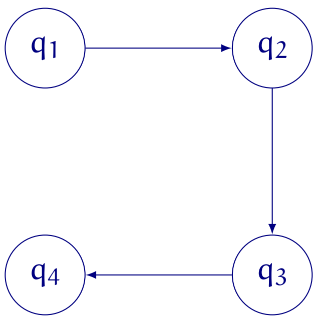
b) 1) $a_{ii} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$.

2) $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

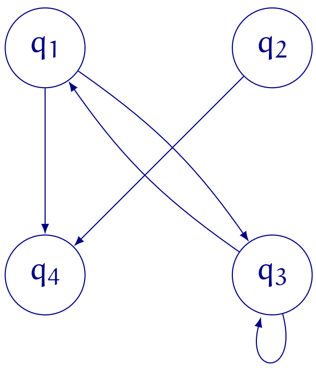
c) Relationen, die reflexiv und symmetrisch sind, erfüllen als Adjazenzmatrix dargestellt die Eigenschaften aus b). Das bedeutet, dass eine diagonale Hälfte der Adjazenzmatrix (ohne Diagonale) frei gewählt werden kann und dann zu einer reflexiv-symmetrischen Relation ergänz werden kann. Damit sind $\frac{n^2-n}{2}$ Stellen der Adjazenzmatrix frei wählbar (mit 0 oder 1). Damit gibt es $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ reflexiv und symmetrische Relationen für eine Menge der Kardinalität n.

d)

1)



2)

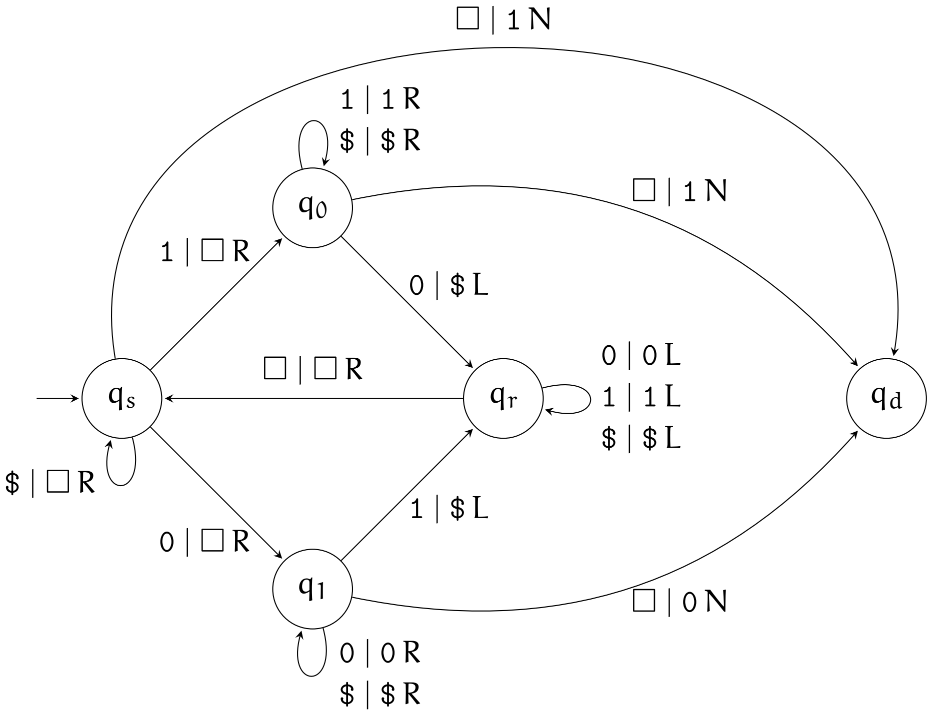


Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!

Aufgabe 7: Turingmaschinen (2 + 4 + 2 = 8 Punkte)

/ 8

Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $\mathcal{M}$ mit Eingabealphabet $A = \{0, 1\}$ und Bandalphabet $B = \{0, 1, \$, \square\}$. $\square$ ist das Blanksymbol. Bei den Bewegungen des Lesekopfs steht L für „links“, R für „rechts“ und N für „nicht bewegen“.



Raster für Teilaufgabe a):

... □	□	1	0	1	0	1	□	□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...
... □								□ ...

/2

a) Führen Sie $\mathcal{M}$ für die Eingabe $w =$ `10101` aus und geben Sie jeweils das Arbeitsband an,

- wenn $\mathcal{M}$ von q_r in den Zustand q_s übergegangen ist, und
- nachdem $\mathcal{M}$ gehalten hat (Endkonfiguration).

Markieren Sie jeweils die Position des Lesekopfs durch Einkreisen der Stelle auf dem Band.

Nutzen Sie dazu das Raster auf der vorherigen Seite. (Es werden nicht alle Zeilen des Rasters benötigt.)

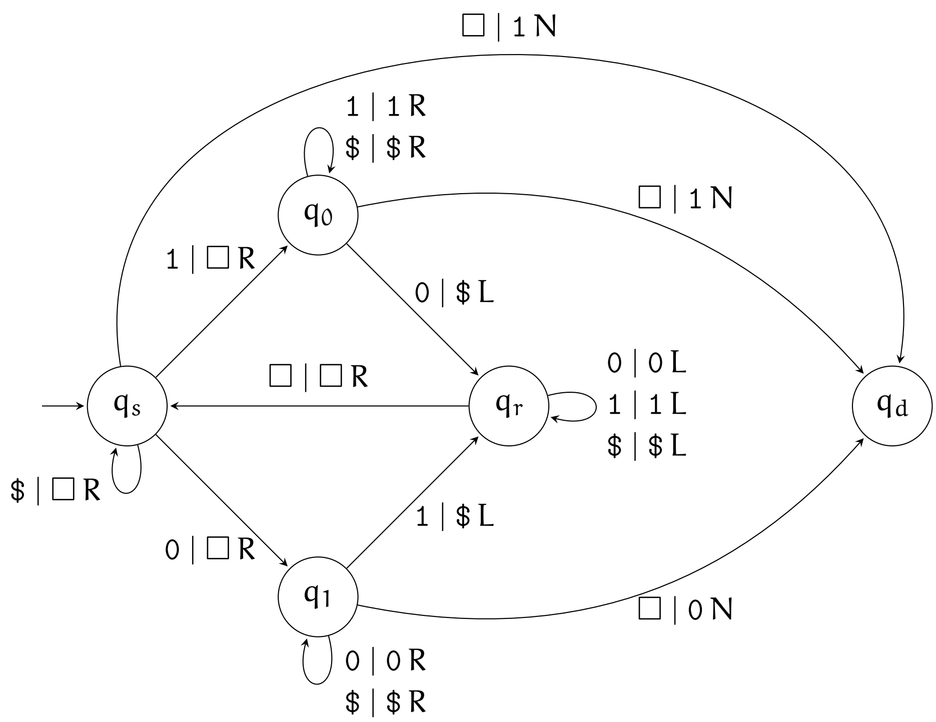
/4

b) $\mathcal{M}$ ist eine Turingmaschine ohne akzeptierende Zustände, die aber ein Ergebnis auf dem Band ablegt.

Konstruieren Sie ausgehend von $\mathcal{M}$ eine Turingmaschine $\mathcal{N}$ mit akzeptierenden Zuständen, sodass $\mathcal{N}$ ein Wort $w \in A^*$ genau dann akzeptiert, wenn $\mathcal{M}$ für die Eingabe w hält und der Kopf in der Endkonfiguration auf ein mit 1 beschriftetes Feld zeigt.

Modifizieren Sie hierzu die unten abgedruckte Kopie von $\mathcal{M}$. Sie können

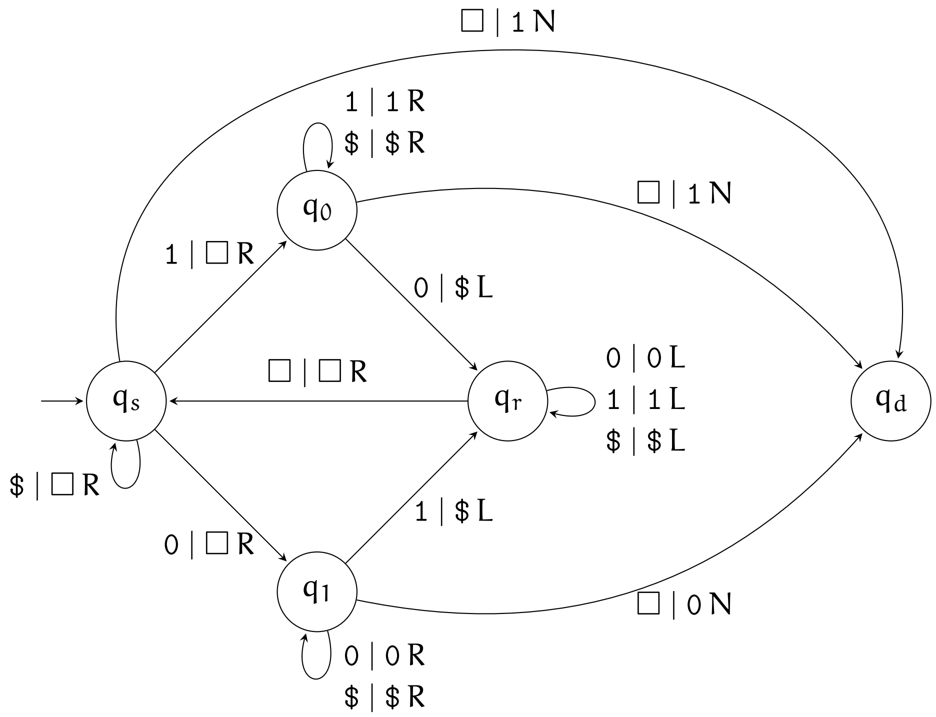
- bis zu 2 neue Zustände hinzufügen,
- Zustandsübergänge wegstreichen,
- neue Zustandsübergänge hinzufügen, und
- Zustände zu akzeptierenden Zuständen machen.



c) Geben Sie die durch $\mathcal{N}$ akzeptierte Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{N})$ in Mengenschreibweise an.

/2

Sie können auch die nachfolgend abgedruckte Kopie von $\mathcal{M}$ verwenden, um Ihre Lösung für Teilaufgabe b) anzugeben.
Wenn Sie beide Skizzen verwenden, kennzeichnen Sie bitte eindeutig, welche Lösung gewertet werden soll!



Lösung 7

a)

$$\begin{array}{ccccccc}
\square & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \square \\
\square & \square & \$ & 1 & 0 & 1 & \square \\
\square & \square & \square & \square & \$ & 1 & \square \\
\square & \square & \square & \square & \square & \square & 1
\end{array}$$

b) Es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu erzielen. Allen gemein ist, dass genau in den Fällen, in denen ein Übergang $\square \mid 1\,\mathrm{N}$ nach q_d möglich ist, ein akzeptierender Zustand erreicht werden muss, und $\mathcal{N}$ dort hält.

Eines der folgenden genügt:

- Hinzufügen eines neuen akzeptierenden Zustands q_x sowie der Kante $q_d \xrightarrow{1|1\,\mathrm{N}} q_x$.
- Entfernen aller Kanten zu q_d und q_s sowie q_0 zu akzeptierenden Zuständen ändern.
- Die Kante zwischen q_1 und q_d entfernen und q_d in einen akzeptierenden Zustand ändern.

c) $L(\mathcal{N}) = \{w \in \{0,1\}^* \mid N_1(w) \geq N_0(w)\}$

*Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!*

Sie können diese Seite für Antworten oder Skizzen und Notizen nutzen.
Notieren Sie dann ggf. bei der Aufgabenstellung, wo die Lösung zu finden ist!