Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 11
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: Freitag, 27.01.2023, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 03.02.2023, 12:30 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 21
Blätter 7 – 11:	/ 102 (+4)
Blätter 1 – 11:	/ 226 (+4)

Aufgabe 11.1 (2 + 5 = 7 Punkte)
Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n \cdot 2^n \\ f_2(n) &= 45n^{12} + \ln\ln(n) \\ f_3(n) &= e^n \\ f_4(n) &= n^{1.47} \cdot n^{10} \\ f_5(n) &= 2^n \end{aligned}$$

a) Ordnen Sie die obenstehenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum. Füllen Sie dafür die untenstehenden Kästchen aus:

$$\boxed{} \preccurlyeq \boxed{} \preccurlyeq \boxed{} \preccurlyeq \boxed{} \preccurlyeq \boxed{}$$

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
   i) $f_5(n) = 2^n \preccurlyeq n \cdot 2^n = f_1(n)$
   ii) $f_1(n) = n \cdot 2^n \preccurlyeq e^n = f_3(n)$

Lösung 11.1
a) Es gilt:

$$\begin{aligned} & f_4(n) = n^{1.47} \cdot n^{10} \\ & \preccurlyeq f_2(n) = 45n^{12} + \ln\ln(n) \\ & \preccurlyeq f_5(n) = 2^n \\ & \preccurlyeq f_1(n) = n \cdot 2^n \\ & \preccurlyeq f_3(n) = e^n \end{aligned}$$

b) Die Beziehung von $f_5(n) = 2^n$ und $f_1(n) = n \cdot 2^n$ betrachten wir genauer: Es gilt $2^n \in O(n \cdot 2^n)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : 2^n &\leq c \cdot n \cdot 2^n \\ \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : \frac{2^n}{n \cdot 2^n} &\leq c \\ \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n} &\leq c \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{n}$ mit wachsendem n immer kleiner wird, lässt es sich durch eine Konstante beschränken. Wähle dazu $n_0 = 1$ und $c = 1$.

Die Beziehung von $f_1(n) = n \cdot 2^n$ und $f_3(n) = e^n$ betrachten wir ebenfalls genauer. Es gilt $f_1(n) = n \cdot 2^n \in O((f_3(n)) = O(e^n)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : n \cdot 2^n &\leq c \cdot e^n \\ \exists c \in \mathbb{R}_+ : \exists n_0 \in \mathbb{N}_0 : \forall n \geq n_0 : \frac{n \cdot 2^n}{e^n} &\leq c \end{aligned}$$

Wir können $n_0 = 0$ und $c = 100$ wählen.
Dafür zeigen wir die Gültigkeit der folgenden großzügigen Abschätzung:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \ \frac{n \cdot 2^n}{e^n} \leq 100 \tag{1}$$

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion:

Induktionsanfang : $n = 0$
Es gilt $\frac{0 \cdot 2^0}{e^0} = 0 \leq 100$.

Induktionsschritt : Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig aber fest.
Es gelte die **Induktionsvoraussetzung**: $\frac{n \cdot 2^n}{e^n} \leq 100$.

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1) \cdot 2^{n+1}}{e^{n+1}} &= \frac{(n+1) \cdot 2^n \cdot 2}{e^n \cdot e} \\
&= \frac{n \cdot 2^n \cdot 2 + 2^n \cdot 2}{e^n \cdot e} \\
&= \frac{2}{e} \cdot \frac{n \cdot 2^n + 2^n}{e^n} \\
&= \frac{2}{e} \cdot \left(\frac{n \cdot 2^n}{e^n} + \frac{2^n}{e^n} \right) \\
&\leq \frac{2}{e} \cdot \left(100 + \frac{2^n}{e^n} \right) \quad (\text{ IV }) \\
&= \frac{200}{e} + \left(\frac{2}{e} \right)^{n+1} \\
&\leq \frac{200}{e} + \frac{2}{e} \quad (\text{ für } a < 1 \text{ gilt } a^n \leq a \ \forall a \geq 1) \\
&= \frac{202}{e} \leq 100 \quad (\text{ da } e \approx 2{,}71 > 2{,}02)
\end{aligned}$$

Aufgabe 11.2 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)
In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Master-Theorem.

a) Geben Sie mithilfe des Master-Theorems eine Abschätzung für das asymptotische Wachstum der Funktionen $F, G : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an.
   i) $F(n) = 64F(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) + \frac{n(n+1)}{2}$
   ii) $G(n) = 7776 \cdot G(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor)$

b) Sei $H : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+, n \mapsto aH(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + n^c$ und $a \geq 1$.
   Für welche $b, c \in \mathbb{R}_+$ mit $b > 1$ gilt nach dem Master-Theorem, dass $H(n) \in \Theta(n^c)$?

Lösung 11.2
Das Mastertheorem betrachtet Funktionen der Form

$$T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \right) + f(n)$$

a) i) Für $F(n) = 64F(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) + \frac{n(n+1)}{2}$ gilt also
   $a = 64, b = 8$ und damit $\log_b(a) = \log_8(64) = 2$ und $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Damit

ist $f(n) \in \Theta(n^2) = \Theta(n^{\log_8(64)})$ und der zweite Fall des Mastertheorems ist anwendbar.
Es gilt also $F(n) \in \Theta(n^2 \log n)$.

ii) Für $G(n) = 7776 \cdot G(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor)$ gilt
$a = 7776, b = 6$ und damit $\log_6(7776) = 5$ und $f(n) = 0$. Weiter gilt $f(n) = 0 \in (n^{5-1}) = (n^4)$ und damit $G \in \Theta(n^5)$ nach dem ersten Fall des Mastertheorems.

b) Um durch Anwendung des Mastertheorems folgern zu können, dass $H(n) \in \Theta(n^c)$ ist, müssen die Bedingungen
- $f \in \Omega(n^{r+\varepsilon})$ für ein $\varepsilon > 0$ und $r = \log_b a$ und
- $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq \gamma f(n)$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}_0$ und für ein γ mit $0 < \gamma < 1$

für den dritten Fall des Mastertheorems erfüllt sein.
Es ist $f(n) = n^c \in \Omega(n^{r+\varepsilon})$, wenn gilt:

$$\begin{aligned}
c \geq r + \varepsilon &\Leftrightarrow c > r \quad (\text{ da } \varepsilon > 0)\\
&\Leftrightarrow 0 > r - c\\
&\Leftrightarrow 0 > \log_b(a) - c \quad (\text{ Def. } r)\\
&\Leftrightarrow 0 > \log_b(a) - \log_b(b^c)\\
&\Leftrightarrow 0 > \log_b\left(\frac{a}{b^c}\right)\\
&\Leftrightarrow \log_b(1) > \log_b\left(\frac{a}{b^c}\right)\\
&\Leftrightarrow 1 > \frac{a}{b^c} \quad (\log_b \text{ streng monoton wachsend für } b > 1)
\end{aligned}$$

Für die zweite Bedingung muss gelten:

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{n}{b}\right)^c \leq \gamma n^c &\Leftrightarrow a\frac{n^c}{b^c} \leq \gamma n^c\\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b^c} \leq \gamma\\
&\Leftrightarrow \frac{a}{b^c} < 1 \quad (\gamma < 1)
\end{aligned}$$

Insgesamt muss also $\frac{a}{b^c} < 1 \Leftrightarrow b^c > a$ gelten.

Aufgabe 11.3 (3 + 3 + 2 + 2 = 10 Punkte)

In dieser Aufgabe wollen wir uns mit *bipartiten* Graphen befassen. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit genau dann, wenn man die Knoten in V in zwei Knotenmengen A, B aufteilen kann, sodass $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ und es keine Kanten zwischen zwei Knoten in A oder zwei Knoten in B gibt. Formal:

$$\forall \{u, v\} \in E : (u \in A \wedge v \in B) \vee (u \in B \wedge v \in A) \quad (\text{ für ungerichtete Graphen })$$
$$\forall (u, v) \in E : (u \in A \wedge v \in B) \vee (u \in B \wedge v \in A) \quad (\text{ für gerichtete Graphen })$$

Eine äquivalente Bedingung ist, dass sie die Knoten des Graphen G mittels einer Färbung $f_G : V \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ so färben können, dass die Endknoten einer Kante immer unterschiedliche Farben haben. In diesem Fall stellt die Färbung die Zuweisung der Knoten zu Mengen A und B wie oben angegeben dar.

a) Wir betrachten wieder die aus dem letzten Übungsblatt bekannte Familie von Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sodass

$$\begin{aligned}
V_n &= Z_2^n\\
E_n &= \{(v, w) \in V_n \times V_n \mid \Delta_n(v, w) = 1 \text{ und } N_1(v) < N_1(w)\}
\end{aligned}$$

mit $\Delta_n : Z_2^n \times Z_2^n \to \mathbb{N}_0, (w, w') \mapsto |\{i \in \mathbb{N}_0 \mid w(i) \neq w'(i)\}|$.

i) Zeigen Sie, dass G_2 bipartit ist, indem Sie eine Zweifärbung f_{G_2} für G_2 angeben

ii) Beweisen Sie, dass alle Graphen G_n bipartit sind.
Hinweis: Sie können dafür eine Vorschrift zur Färbung der Knoten angeben und zeigen, dass Ihre Färbung korrekt ist. Es ist möglich, die Korrektheit der Färbung ohne vollständige Induktion zu zeigen.

b) Sei M eine Menge von Gefahrgütern, die auf zwei Schränke verteilt werden sollen, so dass für die inhalte $S_1 \subseteq M$ und $S_2 \subseteq M$ der Schränke gilt: $S_1 \cup S_2 = M$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
Die binäre Relation $\textsc{ok} \subset M \times M$ enthält die Paare von Gefahrgütern, die zusammen in einem Schrank aufbewahrt werden dürfen.
Geben Sie einen ungerichteten Graphen C (für Check) mit Knotenmenge M an, der bipartit bezüglich der Mengen S_1 und S_2 ist genau dann, wenn die Lagerungsbedingungen von $\textsc{ok}$ eingehalten wurden.
Begründen Sie, warum Ihre Lösung korrekt ist.

c) Sei $U = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph mit $|V| \in \mathbb{N}_+$ Knoten. Wieviele Kanten hat U höchstens? Geben Sie eine möglichst genaue obere Schranke an.

d) Wir betrachten nun die Familie von ungerichteten Graphen $U_n = (\mathbb{Z}_n, E_n)$ für $n \in \mathbb{N}_+$ mit Kantenmenge

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathbb{Z}_n \text{ und } u + 2 < v\}$$

i) Geben Sie eine geschlossene Formel für $|E_n|$ in Abhängigkeit von n an.

ii) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_+$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: U_n ist nicht bipartit?

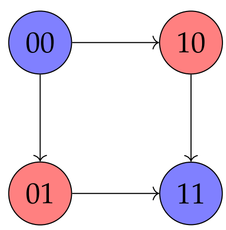
Lösung 11.3

a) Wir zeigen, dass sowohl G_2 als auch G_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$ bipartit sind, indem wir eine Zweifärbung angeben.

i) Eine gültige Zweifärbung für G_2 ist zum Beispiel

$$f_{G_2} : Z_2^n \to \{\text{rot}, \text{blau}\}, v \mapsto \begin{cases} \text{rot} & \text{, wenn } v \in \{\texttt{10}, \texttt{01}\} \\ \text{blau} & \text{, sonst} \end{cases}.$$

Die Färbung kann auch graphisch dargestellt werden durch:



ii) Eine gültige Zweifärbung für G_n lässt sich angeben als

$$f_{G_n} : Z_2^n \to \{\text{rot}, \text{blau}\}, v \mapsto \begin{cases} \text{blau} & \text{, wenn } N_1(v) \text{ ungerade} \\ \text{rot} & \text{, wenn } N_1(v) \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit die Zweifärbung gültig ist, darf es keine Kante zwischen zwei blau oder zwei rot gefärbten Knoten geben. Für jede Kante $(v, w) \in E_n$ gilt nach

Definition, dass $\Delta_n(v,w) = 1$ (v und w dürfen sich also nur an einer Stelle unterscheiden). Für $v,w \in Z_2^n$ gilt also, dass entweder an einer Stelle in v eine `0` und an der entsprechenden Stelle in w eine `1` stehen muss oder anders herum. $N_{\texttt{1}}(v)$ und $N_{\texttt{1}}(w)$ unterscheiden sich daher immer um genau 1, weshalb nicht beide gerade oder ungerade sein und damit auch nicht die gleiche Farbe haben können.

b) Sei $\not\not{} = (M \times M) \setminus \text{OK}$, die Relation, die ausdrückt, dass zwei Gefahrgüter *nicht* zusammen gelagert werden dürfen (beachten Sie: diese Relation ist symmetrisch). Der ungerichtete Graph $C = (M, \not\not{})$ leistet das Gewünschte.

Wir müssen begründen, dass C bipartit ist genau dann, wenn $\forall m_1, m_2 \in M : \not\not{}(m_1, m_2) \to (m_1 \in S_1 \wedge m_2 \in S_2) \vee (m_1 \in S_2 \wedge m_2 \in S_1)$.
Wenn C bipartit ist, dann gibt es disjunkte Teilmengen A, B mit $A \cup B = M$, sodass innerhalb der Teilmengen keine Kante existiert. Da innerhalb der Teilmengen keine Kante existiert, dürfen diese Gefahrgüter zusammen gelagert werden. Räume nun alle Gefahrgüter $m \in A$ in Schrank S_1 und alle $m \in B$ in Schrank S_2.

Wenn gilt, dass $\forall m_1, m_2 \in M : \not\not{}(m_1, m_2) \to (m_1 \in S_1 \wedge m_2 \in S_2) \vee (m_1 \in S_2 \wedge m_2 \in S_1)$, dann ist C bipartit mit $A = S_1, B = S_2$. Es gilt $A \cup B = M$, da alle Gegenstände in einem Schrank untergebracht werden müssen und $A \cap B = \emptyset$ da kein Gegenstand in zwei Schränken gleichzeitig sein kann. Außerdem gibt es keine Kante innerhalb einer Teilmenge, da die Gegenstände in einem Schrank zusammen gelagert werden dürfen, sofern sie korrekt zugeteilt wurden.

c) Wenn $U = (V, E)$ bipartit ist, gibt es disjunkte Teilmengen A, B mit $A \cup B = V$ und es kann nur Kanten zwischen Knoten dieser Teilmengen geben. Sei nun $|A| = m \in \mathbb{N}_0$ für $0 \leq m \leq |V|$ und $|B| = |V| - m$. Jeder Knoten $a \in A$ kann höchstens eine Kante zu jedem Knoten $b \in B$ haben, daher gilt:

$$|E| \leq m(|V| - m) = -m^2 + |V|m$$

$-m^2 + |V|m$ nimmt als konkave quadratische Funktion ihr Maximum für m^* mit

$$-2m^* + |V| = 0 \Leftrightarrow m^* = \frac{|V|}{2}$$

an. Es gilt also

$$|E| \leq \frac{|V|}{2}\left(|V| - \frac{|V|}{2}\right) = \frac{|V|^2}{4} .$$

d) Wir betrachten hierfür die maximale Anzahl an Kanten in U_n. Da $\{u,v\} \in E_n \leftrightarrow u + 2 < v \leftrightarrow u + 3 \leq v$, hat U_i für $1 \leq i \leq 3$ keine Kanten. Für $v \geq 4$ gilt $|\{\{u, v-1\} \in \mathbb{Z}_v \times \mathbb{Z}_v \mid u + 3 \leq v - 1\}| = v - 3$, da es in U_v genau v Knoten gibt und Knoten $v - 1$ ist mit allen verbunden ist, außer $v - 2, v - 3$ und sich selbst. Da die Kanten in U_n auch in U_{n+1} enthalten sind, gilt

$$|E_n| = 0 + 0 + 0 + \sum_{i=4}^{n} i - 3 = \sum_{i=1}^{n-3} i = \begin{cases} 0 & , n \leq 1 \\ \frac{(n-3)(n-2)}{2} & , n > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , n \leq 1 \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 & , n > 1 \end{cases}$$

Ein ungerichteter bipartiter Graph mit n Knoten hat nach der vorherigen Teilaufgabe höchstens $\frac{n^2}{4}$ Kanten. Wir suchen also ein $n_0 \in \mathbb{N}_+$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{n^2}{4} < \begin{cases} 0 & , n \leq 1 \\ \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 & , n > 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \frac{n^2}{4} < \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 \quad (\text{ für } n > 1) \\
&\Leftrightarrow -\frac{n^2}{4} + \frac{5}{2}n - 3 < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{4}(-n^2 + 10n - 12) < 0
\end{aligned}
$$

Außerdem ist die Steigung von $-n^2 + 10n - 12$ negativ, wenn $-2n + 10 \leq 0 \Leftrightarrow n \geq 5$. Wir können also $n_0 = 10 > 1$ wählen, da für $n = 10$ gilt $\frac{1}{4}(-n^2 + 10n - 12) = -3 < 0$ und da $10 \geq 5$ der Funktionswert auch für größere n immer kleiner wird. (Tatsächlich ist U_n schon für $n \geq 7$ nicht mehr bipartit, zur Lösung der Aufgabe genügt es aber, eine größere Abschätzung anzugeben.)