Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 11

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	
Tutor*in:	

Ausgabe: Freitag, 27.01.2023, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 03.02.2023, 12:30 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 11:	/ 21
Blätter 7 – 11:	/ 102 (+4)
Blätter 1 – 11:	/ 226 (+4)

Aufgabe 11.1 **(2 + 5 = 7 Punkte)**
Gegeben sind die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ für $i \in \{1,2,3,4,5\}$:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n \cdot 2^n \\ f_2(n) &= 45n^{12} + \ln\ln(n) \\ f_3(n) &= e^n \\ f_4(n) &= n^{1.47} \cdot n^{10} \\ f_5(n) &= 2^n \end{aligned}$$

a) Ordnen Sie die obenstehenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum. Füllen Sie dafür die untenstehenden Kästchen aus:

$$\boxed{} \preccurlyeq \boxed{} \preccurlyeq \boxed{} \preccurlyeq \boxed{} \preccurlyeq \boxed{}$$

b) Zeigen oder widerlegen Sie:
   i) $f_5(n) = 2^n \preccurlyeq n \cdot 2^n = f_1(n)$
   ii) $f_1(n) = n \cdot 2^n \preccurlyeq e^n = f_3(n)$

Aufgabe 11.2 **(1 + 1 + 2 = 4 Punkte)**
In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Master-Theorem.

a) Geben Sie mithilfe des Master-Theorems eine Abschätzung für das asymptotische Wachstum der Funktionen $F, G : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ an.
   i) $F(n) = 64F(\lfloor \frac{n}{8} \rfloor) + \frac{n(n+1)}{2}$
   ii) $G(n) = 7776 \cdot G(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor)$

b) Sei $H : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+, n \mapsto aH(\lfloor \frac{n}{b} \rfloor) + n^c$ und $a \geq 1$.
   Für welche $b, c \in \mathbb{R}_+$ mit $b > 1$ gilt nach dem Master-Theorem, dass $H(n) \in \Theta(n^c)$?

Aufgabe 11.3 **(3 + 3 + 2 + 2 = 10 Punkte)**
In dieser Aufgabe wollen wir uns mit *bipartiten* Graphen befassen. Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit genau dann, wenn man die Knoten in V in zwei Knotenmengen A, B aufteilen kann, sodass $V = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$ und es keine Kanten zwischen zwei Knoten in A oder zwei Knoten in B gibt. Formal:

$$\forall \{u, v\} \in E : (u \in A \land v \in B) \lor (u \in B \land v \in A) \quad (\text{ für ungerichtete Graphen })$$
$$\forall (u, v) \in E : (u \in A \land v \in B) \lor (u \in B \land v \in A) \quad (\text{ für gerichtete Graphen })$$

Eine äquivalente Bedingung ist, dass sie die Knoten des Graphen G mittels einer Färbung $f_G : V \to \{\text{rot}, \text{blau}\}$ so färben können, dass die Endknoten einer Kante immer unterschiedliche Farben haben. In diesem Fall stellt die Färbung die Zuweisung der Knoten zu Mengen A und B wie oben angegeben dar.

a) Wir betrachten wieder die aus dem letzten Übungsblatt bekannte Familie von Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sodass

$$\begin{aligned} V_n &= Z_2^n \\ E_n &= \{(v, w) \in V_n \times V_n \mid \Delta_n(v, w) = 1 \text{ und } N_1(v) < N_1(w)\} \end{aligned}$$

mit $\Delta_n : Z_2^n \times Z_2^n \to \mathbb{N}_0, (w, w') \mapsto |\{i \in \mathbb{N}_0 \mid w(i) \neq w'(i)\}|$.

i) Zeigen Sie, dass G_2 bipartit ist, indem Sie eine Zweifärbung f_{G_2} für G_2 angeben

ii) Beweisen Sie, dass alle Graphen G_n bipartit sind.
Hinweis: Sie können dafür eine Vorschrift zur Färbung der Knoten angeben und zeigen, dass Ihre Färbung korrekt ist. Es ist möglich, die Korrektheit der Färbung ohne vollständige Induktion zu zeigen.

b) Sei M eine Menge von Gefahrgütern, die auf zwei Schränke verteilt werden sollen, so dass für die inhalte $S_1 \subseteq M$ und $S_2 \subseteq M$ der Schränke gilt: $S_1 \cup S_2 = M$ und $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.
Die binäre Relation $\textsc{ok} \subset M \times M$ enthält die Paare von Gefahrgütern, die zusammen in einem Schrank aufbewahrt werden dürfen.
Geben Sie einen ungerichteten Graphen C (für Check) mit Knotenmenge M an, der bipartit bezüglich der Mengen S_1 und S_2 ist genau dann, wenn die Lagerungsbedingungen von $\textsc{ok}$ eingehalten wurden.
Begründen Sie, warum Ihre Lösung korrekt ist.

c) Sei $U = (V, E)$ ein ungerichteter bipartiter Graph mit $|V| \in \mathbb{N}_+$ Knoten. Wieviele Kanten hat U höchstens? Geben Sie eine möglichst genaue obere Schranke an.

d) Wir betrachten nun die Familie von ungerichteten Graphen $U_n = (\mathbb{Z}_n, E_n)$ für $n \in \mathbb{N}_+$ mit Kantenmenge

$$E_n = \{\{u, v\} \mid u, v \in \mathbb{Z}_n \text{ und } u + 2 < v\}$$

i) Geben Sie eine geschlossene Formel für $|E_n|$ in Abhängigkeit von n an.

ii) Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}_+$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: U_n ist nicht bipartit?