Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 10
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:

Nachname:

Vorname:

Tutorium Nr.: Tutor*in:

Ausgabe: Freitag, 20.01.2023, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 27.01.2023, 12:30 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

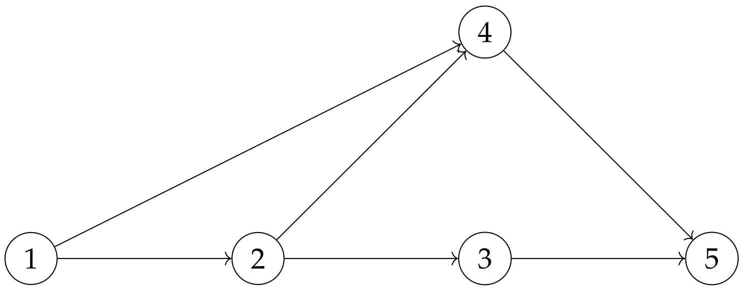
erreichte Punkte

Blatt 10:	/ 20
Blätter 7 – 10:	/ 81 (+4)
Blätter 1 – 10:	/ 205 (+4)

Aufgabe 10.1 (2 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 Punkte)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Zusammenhängen zwischen verschiedenen Eigenschaften eines Graphen und seiner Darstellung als Adjazenzmatrix.

a) Betrachten Sie den folgenden Graphen:



i) Geben Sie die Adjazenzmatrix des abgebildeten Graphen an.

ii) Geben Sie die Wegematrix des abgebildeten Graphen an.

Wir betrachten nun einen beliebigen gerichteten Graphen $G = (V, E)$ und seine Darstellung als Adjazenzmatrix A.

b) Sei $L \subseteq \mathbb{N}_0$ eine Menge von Pfadlängen. Geben Sie in Abhängigkeit von A und L eine Formel zur Berechnung einer Matrix P an, sodass P_{ij} die Anzahl aller Pfade mit einer erlaubter Länge (d.h. mit einer Länge die in L liegt) von Knoten i zu Knoten j in G ist.

c) Geben Sie eine Formel an, mit der sich der Ausgangsgrad $d^+(v_i)$ eines Knotens $v_i \in V$ aus A berechnen lässt.

d) Geben Sie eine Formel an, mit der sich der Eingangsgrad $d^-(v_i)$ eines Knotens $v_i \in V$ aus A berechnen lässt.

e) Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *strikte obere Dreiecksmatrix* genau dann, wenn für alle $i, j \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $m_{ij} = 0$, falls $i \geq j$.
Zeigen Sie: Wenn die Adjazenzmatrix A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, dann besitzt der zugehörige Graph G keinen Zyklus (man sagt, er ist *zyklenfrei*).

Lösung 10.1

a) i)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii)

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Wir wissen: $(A^k)_{ij}$ ist die Anzahl an Pfaden der Länge k von Knoten i zu Knoten j in G. Daher gilt:

$$P = \sum_{l \in L} A^l$$

c) $d^+(v_i) = \sum_j a_{ij}$ (Man bildet die Summe über die i-te Zeile der Adjazenzmatrix)

d) $d^-(v_i) = \sum_j a_{ji}$ (Man bildet die Summe über die i-te Spalte der Adjazenzmatrix)

e) Wir wollen beweisen, dass ein Graph G mit einer strikten oberen Dreiecksmatrix A als Adjazenzmatrix zyklenfrei ist.
Wir müssen also zeigen, dass in G kein Zyklus $Z = (v_{Z(0)}, v_{Z(1)}, \ldots, v_{Z(n)}, v_{Z(n+1)})$, wobei $Z(n+1) = Z(0)$ existieren kann. Dabei bezeichne $Z(i), i \in \mathbb{N}_0$ den Index des i-ten Knotens im Zyklus Z in der Adjazenzmatrix.
Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es gibt doch einen Zyklus Z. Da A eine strikte obere Dreiecksmatrix ist, gilt $a_{ij} = 0$, falls $i \geq j$ und damit folgt, dass es nur Kanten (v_i, v_j) mit $i < j$ geben kann.
Es gilt also auch für die Kanten $(v_{Z(i)}, v_{Z(i+1)})$ im Zyklus Z: $Z(i) < Z(i+1)$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ und $i \leq n$.
Z beginnt mit einer Kante $(v_{Z(0)}, v_{Z(1)})$ und endet mit einer Kante $(v_{Z(n)}, v_{Z(0)})$. Da es nur Kanten von Knoten mit kleinerem Index zu Knoten mit größerem Index gibt, muss gelten $Z(0) < Z(1) < Z(n) < Z(0)$. Offensichtlich kann aber nicht gelten, dass $Z(0) < Z(0)$.

Aufgabe 10.2 (1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Sei $\Delta_n : Z_2^n \times Z_2^n \to \mathbb{N}_0, (w, w') \mapsto |\{i \in \mathbb{N}_0 \mid w(i) \neq w'(i)\}|$ die Funktion, die für zwei Bitfolgen der Länge n angibt, an wie vielen Stellen sie sich unterscheiden. Mithilfe von Δ_n definieren wir eine Familie von Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\begin{aligned} V_n &= Z_2^n \\ E_n &= \{(v, w) \in V_n \times V_n \mid \Delta_n(v, w) = 1 \text{ und } N_1(v) < N_1(w)\} . \end{aligned}$$

Weiter sei die Familie von Graphen $G'_n = (V'_n, E'_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch die induktive Definition

$$\begin{aligned} V'_0 &= \{1\} \\ E'_0 &= \emptyset \\ V'_{i+1} &= V'_i \cup \{v + |V'_i| \mid v \in V'_i\} \\ E'_{i+1} &= E'_i \cup \{(u + |V'_i|, v + |V'_i|) \mid (u, v) \in E'_i\} \cup \{(v, v + |V'_i|) \mid v \in V'_i\} . \end{aligned}$$

a) Zeichnen Sie den Graphen G_3.

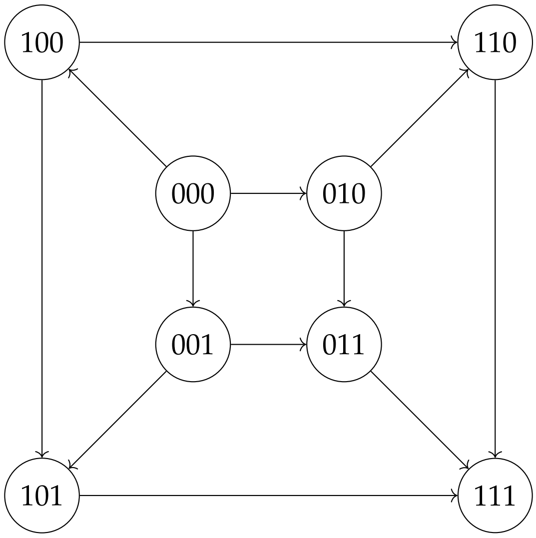
b) Zeichnen Sie die Graphen G'_1, G'_2 und G'_3.

c) Sind die Graphen G_3 und G'_3 isomorph zueinander? Wenn ja, geben Sie einen geeigneten Isomorphismus an. Wenn nein, begründen Sie!

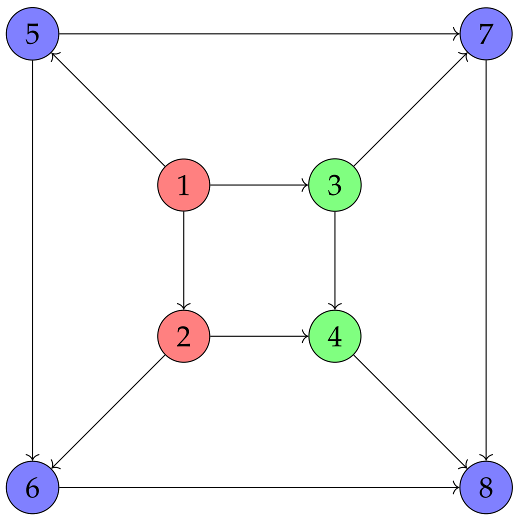
d) Sind die Graphen G_n und G'_n isomorph für beliebige $n \in \mathbb{N}_+$? Wenn ja, geben Sie in Abhängigkeit von n einen geeigneten Isomorphismus an. Wenn nein, begründen Sie!

Lösung 10.2

a) Zeichnung für G_3



b) Zeichnung für G'_1, G'_2, G'_3. Dabei ist G'_1 der Graph, der durch $V'_1 = \{1, 2\}$, G'_2 der Graph, der durch $V'_2 = \{1, 2, 3, 4\}$ und G'_3 der Graph, der durch $V'_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ induziert wird.



c) Ja, die Graphen G_3 und G'_3 sind isomorph. Die Isomorphie wird belegt durch die Bijektion $f : V_3 \to V'_3$ definiert durch

v	000	001	010	011	100	101	110	111
$f(v)$	1	2	3	4	5	6	7	8

Genauso könnten Sie auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : V'_3 \to V_3$ mit

v'	1	2	3	4	5	6	7	8
$f^{-1}(v)$	000	001	010	011	100	101	110	111

als Beleg für die Isomorphie angeben.

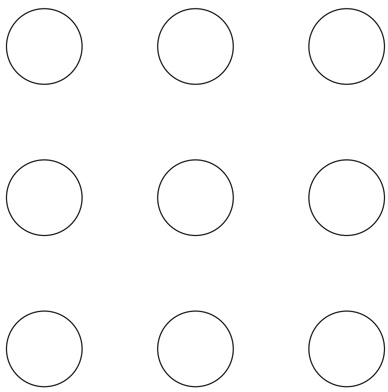
d) Ja, G_n und G'_n sind für $n \in \mathbb{N}_+$ ismorph mittels der folgenden Isomorphieabbildung: $f : V_n \to V'_n, v \mapsto \mathrm{Num}_2(v) + 1$ mit Inverser $f^{-1} : V'_n \to V_n, v' \mapsto \mathrm{Bin}_n(v' - 1)$.

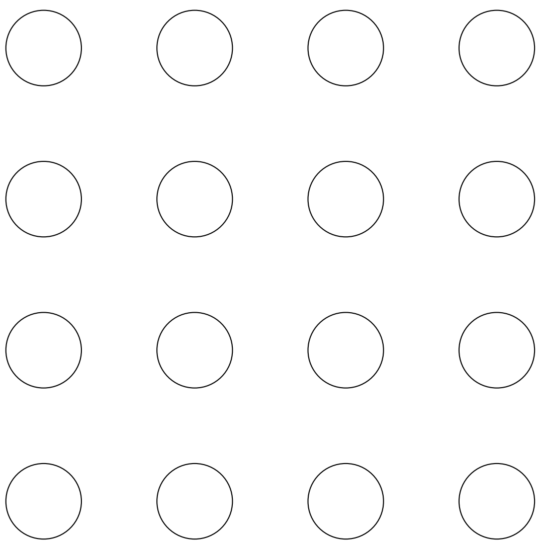
Aufgabe 10.3 (1 + 2 + 4 = 7 Punkte)
Ähnlich wie auf Blatt 1 sei $B_n = \{(a,b) \in \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \mid 1 \leq a,b \leq n\}$ die Formalisierung eines Schachbrettes mit $n \times n$ Feldern. Damals haben Sie herausgefunden, dass sich die Menge aller möglichen Springerzüge auf einem traditionellen Schachbrett B_8 als Relation beschreiben lässt. Verallgemeinert auf ein Schachbrett mit $n \times n$ Feldern lautet die Relation:

$$R_n = \{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in B_n \times B_n \mid |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| = 3 \land |a_1 - a_2| \in \{1,2\}\} .$$

In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass sich Relationen mithilfe von Graphen ausdrücken lassen. Falls die Relation R_n symmetrisch ist, reicht es im Folgenden dann ungerichtete Graphen zu betrachten.

a) Zeigen Sie: R_n ist symmetrisch für alle $n \in \mathbb{N}_+$.
b) Zeichnen Sie die ungerichteten Graphen Graphen $U_3 = (B_3, R_3)$ und $U_4 = (B_4, R_4)$, die die möglichen Springerzüge auf Schachbrettern mit 3×3 beziehungsweise 4×4 Feldern repräsentieren.
Verwenden Sie dazu die vorgedruckten Knoten für B_3 und B_4:





c) Die Formalisierung als Graph ist hilfreich, um einige interessante Eigenschaften des Schachspiels zu analysieren. In dieser Aufgabe wollen wir folgende Aussage beweisen:

> Jedes Feld kann von einem Springer erreicht werden, egal auf welchem Feld der Springer startet.

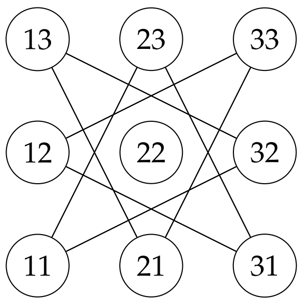
Um die Gültigkeit dieser Aussage zu zeigen, sollen Sie beweisen, dass $U_8 = (B_8, R_8)$ zusammenhängend ist.
Zeigen Sie, dass U_8 zusammenhängend ist, indem Sie durch vollständige Induktion zeigen, dass U_n für alle $n \geq n_0$ (für ein sinnvoll von Ihnen gewähltes $n_0 \in \mathbb{N}_0$) zusammenhängend ist.
Hilfreiche Beobachtung: Betrachten Sie zusammenhängende Teilgraphen von U_n.
Hinweis: Sie können die obenstehende Beobachtung, das Induktionsprinzip und Ergebnisse voranstehender Teilaufgaben verwenden.

Lösung 10.3

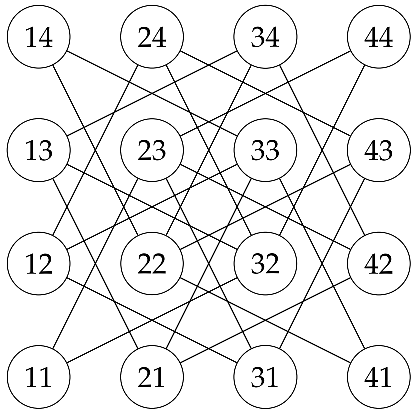
a) Wir wollen zeigen, dass R_n symmetrisch ist für alle $n \in \mathbb{N}_+$.
Sei also $n \in \mathbb{N}_+$ beliebig.
Die Relation R_n ist genau dann symmetrisch, wenn $\forall (a,b),(a',b') \in B_n \times B_n$: $(a,b)R_n(a',b') \Leftrightarrow (a',b')R_n(a,b)$
Betrachte beliebige $(a,b),(a',b') \in B_n \times B_n$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(a,b)R_n(a',b') &\Leftrightarrow |a-a'| + |b-b'| = 3 \wedge |a-a'| \in \{1,2\} \quad (\text{ Def. } R_n) \\
&\Leftrightarrow |-(a-a')| + |-(b-b')| = 3 \wedge |-(a-a')| \in \{1,2\} \quad (|-x| = |x|) \\
&\Leftrightarrow |a'-a| + |b'-b| = 3 \wedge |a'-a| \in \{1,2\} \quad (\text{ Klammer auflösen }) \\
&\Leftrightarrow (a',b')R_n(a,b) \quad (\text{ Def. } R_n)
\end{aligned}$$

b) U_3



U_4



c) Wir zeigen die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 4$ durch vollständige Induktion über n.

Induktionsanfang : Sei $n = 4$.
Der Graph U_4 ist zusammenhängend, wie aus der Zeichnung in Teilaufgabe b) ersichtlich ist.

Induktionsschritt : Sei $n \in \mathbb{N}_+$ mit $n \geq 4$ beliebig aber fest.
Es gelte die **Induktionsvoraussetzung**: U_n ist zusammenhängend.
Wir betrachten nun $U_{n+1} = (B_{n+1}, R_{n+1})$.

Um zu zeigen, dass U_{n+1} zusammenhängend ist, müssen wir beweisen, dass es für beliebige Knoten $u, v \in B_{n+1}$ einen Weg von u nach v gibt.
Wir betrachten zuerst einen Knoten $(a, b) \in B_{n+1} \setminus B_n$ und nutzen eine Fallunterscheidung über die Koordinaten a, b:

- **Fall 1**: $a = n + 1$ und $b \geq 3$
  Nach Definition von R_{n+1} gilt
  $$(a, b)R_{n+1}(a', b') \Leftrightarrow |n + 1 - a'| + |b - b'| = 3 \wedge |n + 1 - a'| \in \{1, 2\}$$
  Wähle $a' = n, b' = b - 2$, dann gilt $(a', b') \in B_n$, da $b' = b - 2 \geq 1$.
- **Fall 2:** $a = n + 1$ und $b \leq 2$
  Nach Definition von R_{n+1} gilt
  $$(a, b)R_{n+1}(a', b') \Leftrightarrow |n + 1 - a'| + |b - b'| = 3 \wedge |n + 1 - a'| \in \{1, 2\}$$
  Wähle $a' = n, b' = b + 2$, dann gilt $(a', b') \in B_n$, da $b' = b + 2 \leq 4 \leq n$.
- **Fall 3**: $b = n + 1$ und $a \geq 3$
  Analog zu Fall 1 können wir $a' = a - 2$ und $b' = n$ wählen, damit $(a', b') \in B_n$.
- **Fall 4**: $b = n + 1$ und $a \leq 2$
  Analog zu Fall 2 können wir $a' = a + 2$ und $b' = n$ wählen, damit $(a', b') \in B_n$.

Wir haben gezeigt, dass es von jedem Knoten $(a, b) \in \mathcal{B}_{n+1} \setminus B_n$ einen Weg zu einem Knoten in B_n gibt.
Damit folgt auch, dass U_{n+1} zusammenhängend ist: Wähle beliebige Knoten $u, v \in B_{n+1}$. Dann gibt es einen Weg von u zu einem Knoten $u' \in B_n$ (falls $u \in \mathcal{B}_{n+1} \setminus B_n$ über eine Kante wie in der Fallunterscheidung bewiesen oder, falls $u \in B_n$ aufgrund von IV) und von v einen Weg zu einem Knoten $v' \in B_n$ (wieder falls $v \in \mathcal{B}_{n+1} \setminus B_n$

über eine Kante wie in der Fallunterscheidung bewiesen oder, falls $v \in B_n$ aufgrund von IV). Da $U_n = (B_n, R_n)$ nach IV zusammenhängend ist, gibt es auch einen Weg von u' nach v' in U_n und damit auch einen Weg von u nach v.