Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 8
Lösungsvorschläge

Matr.nr.:	
Nachname:	
Vorname:	
Tutorium Nr.:	Tutor*in:

Ausgabe: Freitag, 16.12.2022, 14:30 Uhr

Abgabe: Freitag, 13.01.2023, 12:30 Uhr
Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:*

erreichte Punkte

Blatt 8:	/ 19
Blätter 7 – 8:	/ 39 (+4)
Blätter 1 – 8:	/ 163 (+4)

Aufgabe 8.1 (2 + 2 = 4 Punkte)
Es seien $L_1 \subseteq A^*$ und $L_2 \subseteq A^*$ zwei kontextfreie Sprachen über einem Alphabet A. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $L_1 \cup L_2$ ist kontextfrei.

b) $L_1 \cap L_2$ ist kontextfrei.

Falls Sie konkrete kontextfreie Sprachen für die Lösung verwenden, sollen Sie auch zeigen, dass sie kontextfrei sind. Sie können sich bei der Lösung auf in der Vorlesung erwähnte Sprachen beziehen, die dort als nicht kontextfrei vorgestellt wurden.

Lösung 8.1

a) Richtig, denn da L_1 und L_2 kontextfrei sind, gibt es Grammatiken $G_1 = (N_1, A, S_1, P_1)$ und $G_2 = (N_2, A, S_2, P_2)$ mit $L(G_1) = L_1$, $L(G_2) = L_2$ und $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Damit lässt sich mit einem neuen Nichtterminalsymbol $S \notin (N_1 \cup N_2)$ die Grammatik $G_3 = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, A, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1|S_2\})$ bilden, die die Eigenschaft $L(G_3) = L_1 \cup L_2$ besitzt. Daraus folgt, dass $L_1 \cup L_2$ kontextfrei ist.

b) Falsch, denn für die kontextfreien Sprachen $L_1 = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^j \mid i,j \in \mathbb{N}_0\}$ und $L_2 = \{\mathtt{a}^j\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \mid i,j \in \mathbb{N}_0\}$ gilt $L_1 \cap L_2 = \{\mathtt{a}^i\mathtt{b}^i\mathtt{c}^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$, welche nach der Vorlesung nicht kontextfrei ist. Die Sprachen L_i sind kontextfrei, da die Gleichung

$$L_i = L((\{S, X, Y\}, A, S, P_i))$$

mit den Produktionsmengen $P_1 = \{S \to XY,\ X \to \varepsilon \mid \mathtt{a}X\mathtt{b},\ Y \to \mathtt{c}Y \mid \varepsilon\}$, $\quad P_2 = \{S \to XY,\ X \to \mathtt{a}X \mid \varepsilon,\ Y \to \mathtt{b}Y\mathtt{c} \mid \varepsilon\}$ erfüllt ist.

Aufgabe 8.2 (2 + 1 + 2 = 5 Punkte)
Es seien $G = (\{S, X, Y\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, S, P)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{&S \to SS \mid XX, \\ &X \to \mathtt{a}X\mathtt{a} \mid \mathtt{b}X\mathtt{b} \mid Y, \\ &Y \to \mathtt{aa} \mid \mathtt{bb} \mid \mathtt{a} \mid \mathtt{b}\} \end{aligned}$$

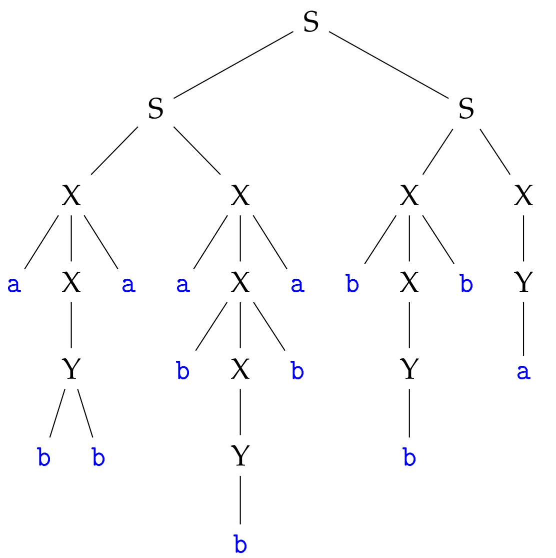
a) Zeichnen Sie einen Ableitungsbaum zu dem Wort $\mathtt{abbaabbbabbba} \in L(G)$.

b) Geben Sie Wörter $u, v, x \in \{S, X, Y, \mathtt{a}, \mathtt{b}\}^*$ mit $S \Rightarrow^2 u \Rightarrow v \Rightarrow^* x \Rightarrow \mathtt{abbaabbbabbba}$ an.

c) Geben Sie die Sprache $L(G)$ an, ohne auf G Bezug zu nehmen.
Hinweis: Eine Möglichkeit, das zu tun, ist es die Menge $M = \{w \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}^* \mid X \Rightarrow^* w\} \subseteq A^*$ der aus dem Nichtterminal X ableitbaren Worte anzugeben und mit Hilfe von M einen Ausdruck in Mengenschreibweise für $L(G)$ anzugeben.

Lösung 8.2

a) Ein möglicher Ableitungsbaum ist der Folgende:



b) $u = SXX$, $v = SXY$, $w = \texttt{abbaabbbab}Y\texttt{ba}$

c) $M = \{w \in \{\texttt{a}, \texttt{b}\}^* \mid w = w^R \wedge |w| > 0\}, \quad L(G) = (MM)^+$

Aufgabe 8.3 (3 + 2 = 5 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie kontextfreie Grammatiken zu den vorgegebenen Sprachen angeben.

a) Aus der Vorlesung ist Ihnen bereits bekannt, dass die Sprache der syntaktisch gültigen aussagenlogischen Formeln durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben werden kann. Betrachten wir nun eine besondere Form von aussagenlogischen Formeln: Die Sprache D der syntaktisch korrekten aussagenlogischen Formeln in *disjunktiver Normalform* wird durch folgende induktive Definition beschrieben:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= Var \cup \{\neg\}Var & \qquad D_1 &= C \\
C_{n+1} &= C_n\{\wedge\}C_1 & D_{n+1} &= D_n\{\vee\}C \\
C &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} C_i & D &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} D_i
\end{aligned}
$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_1 an, sodass $L(G_1) = D$. Verwenden Sie dafür die Terminalsymbole $T = Var \cup \{\neg, \wedge, \vee\}$.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 an, sodass

$$L(G_2) = (\{\texttt{aa}, \texttt{ab}, \texttt{ba}, \texttt{bb}\}\{\texttt{b}\}\{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*) \cup (\{\texttt{a}, \texttt{b}\}^*\{\texttt{abba}\})$$

Lösung 8.3

a)

$$
\begin{aligned}
G_1 &= (\{D, C, L\}, T, D, P_1) \\
P_1 &= (\{L\} \times Var) \cup (\{L\} \times (\{\neg\}Var)) \cup \{D \to D \vee C \mid C, \quad C \to C \wedge L \mid L\}
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned} G_2 &= (\{S, A\}, \{\texttt{a}, \texttt{b}\}, S, P_2) \\ P_2 &= \{S \to \texttt{aab}A \mid \texttt{abb}A \mid \texttt{bab}A \mid \texttt{bbb}A \mid A\texttt{abba}, \\ &\quad\; A \to \texttt{a}A \mid \texttt{b}A \mid \varepsilon\} \end{aligned}$$

Aufgabe 8.4 (2 + 1 + 1 + 1 = 5 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Gleichung für eine Sprache $L \subseteq A^*$ über dem Alphabet $A = \{\texttt{a}, \texttt{b}\}$:

$$L = L \cup \{\texttt{b}\}L \cup \{\texttt{a}\} \tag{1}$$

a) Geben Sie die kleinste Lösung L_1 der Gleichung (1) an. Eine Sprache L_1 heißt die kleinste Lösung, wenn für jede Lösung L' von (1) die Beziehung $L_1 \subseteq L'$ gilt.
b) Geben Sie die größte Lösung L_2 an, welche die Gleichung erfüllt. Eine Lösung heißt die größte Lösung, wenn für jede Lösung L' von (1) die Beziehung $L' \subseteq L_2$ gilt.
c) Geben Sie eine weitere Lösung L_3 von (1) an, die von L_1 und L_2 verschieden ist.
d) Geben Sie die einzige Lösung der Gleichung $\{\texttt{a}\}L_4 = \{\texttt{b}\}L_4$ an.

Lösung 8.4
a) $L_1 = \{\texttt{b}\}^*\{\texttt{a}\}$
b) $L_2 = A^*$
c) $L_3 = A^+$
d) $L_4 = \emptyset$