Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 5

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe:	Freitag, 25.11.2022, 14:30 Uhr
Abgabe:	Freitag, 2.12.2022, 12:30 Uhr Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter "Tutorien" im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 5:	/ 21	Blätter 1 – 5, Stud. 1:	/ 105
		Blätter 1 – 5, Stud. 2:	/ 105

Aufgabe 5.1 (1.5 + 0.5 + 1 + 0.5 + 1.5 + 1 + 2 = 8 Punkte)
Seien $A = \{\texttt{a}, \texttt{e}, \texttt{m}, \texttt{t}\}$ und $B = \{\texttt{0}, \texttt{1}\}$ zwei Alphabete und $w = \texttt{matetee}$. Wir wollen uns im Folgenden mit Codierungen von Wörten über dem Alphabet A befassen.

a) Berechnen Sie eine Huffman-Codierung, indem Sie einen Huffman-Baum für das Wort w aufstellen. Geben Sie dafür eine Funktion $h\colon A \to B^*$ an, die einen Homomorphismus h^{**} induziert, der die Huffman-Codierung des Wortes w erzeugt.

b) Geben Sie das codierte Wort $h^{**}(w)$ an.

c) Geben Sie eine unendliche Menge $V \subseteq A^*$ an, so dass h^{**} die Huffman-Codierung für jedes $v \in V$ ist.

d) Sei eine weitere Codierung $c^{**} : A^* \to B^*$ gegeben, die durch die Funktion $c\colon A \to B^*$ wie folgt induziert wird:

$$c(\texttt{a}) = \texttt{00}, \quad c(\texttt{e}) = \texttt{01}, \quad c(\texttt{m}) = \texttt{10}, \quad c(\texttt{t}) = \texttt{11}$$

Geben Sie das codierte Wort $c^{**}(\texttt{matetee})$ an.

e) Geben Sie ein Wort $v \in A^*$ minimaler Länge an, so dass
   * jedes Zeichen von A mindestens einmal in v vorkommt, und
   * die Codierung $h^{**}(v)$ echt kürzer ist als $c^{**}(v)$, also $|h^{**}(v)| < |c^{**}(v)|$ gilt.

Bei Datenübertragungen wird häufig (jedoch nicht ausschließlich) das binäre Alphabet B verwendet. In der Realität sind Datenübertragungen allerdings nicht immer fehlerfrei. Im Folgenden wollen wir uns rudimentär mit fehlerbehafteten Übertragungen auseinandersetzen. Dafür wollen wir davon ausgehen, dass während der Übertragung eines Codewortes über B Störungen auftreten können. Diese Störungen machen sich in unserer Betrachtung durch ein „gekipptes" Bit bemerkbar. Um eine Störung eines bestimmten Bits zu simulieren, wollen wir die Störfunktion $\lightning_i$ verwenden, die ein Wort über B auf das gleiche Wort, allerdings mit einer Störung an der Stelle i, abbildet – also die $\texttt{1}$ mit der $\texttt{0}$ vertauscht, und andersherum. Die Funktion ist formal wie folgt definiert:

$$\lightning_i\colon B^* \to B^*, u \mapsto w \text{ mit } w(j) = \begin{cases} \texttt{0} & i = j \text{ und } u(i) = \texttt{1} \\ \texttt{1} & i = j \text{ und } u(i) = \texttt{0} \\ u(j) & i \neq j \end{cases} \qquad (\text{für } 0 \leq j < |u|)$$

mit $|u| = |\lightning_i(u)|$ für $0 \leq i < |u|$.

f) Decodieren Sie die gestörten Codewörter $\lightning_2(h^{**}(w))$, $(\lightning_2 \circ \lightning_6)(h^{**}(w))$, $\lightning_2(c^{**}(w))$ und $(\lightning_2 \circ \lightning_6)(c^{**}(w))$.

g) Wiegen Sie die Vor-, und Nachteile der beiden Codierungen h^{**} und c^{**} ab, wenn Wörter über A codiert übertragen werden sollen. Nennen Sie dazu ein Szenario in der die Kodierung h^{**} vorteilhafter ist und ein Szenario, in der die Codierung c^{**} vorteilhafter ist.

Aufgabe 5.2 (0.5 + 1.5 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Auf Blatt 2 haben Sie bereits den Operator $\owedge_n\colon Z_2^n \times Z_2^n \to Z_2^n$ sowie in der Vorlesung die Funktionen Repr_k, Num_k, und die Modulooperation $a \textbf{ mod } b$ kennen gelernt. Zur Erinnerung:

$$u \owedge_n v = w \text{ mit } w(i) = \begin{cases} \texttt{1}, & \text{wenn } u(i) = \texttt{1} \text{ und } v(i) = \texttt{1} \\ \texttt{0}, & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie 28 **mod** 16
b) Berechnen Sie $\mathrm{Repr}_2(28)$ schrittweise.
c) Berechnen Sie $\mathrm{Num}_2(\mathrm{Repr}_2(28) \oslash_5 \mathtt{01111})$.
d) Sei $\mathrm{shl}\colon Z_2^* \to Z_2^*, w \mapsto w \cdot \mathtt{0}$ der „shift left" Operator. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Num}_2(\mathrm{shl}(w)) = 2 \cdot \mathrm{Num}_2(w)$ für alle $w \in Z_2^*$ gilt.
e) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über k, dass $2^k - 1 = \mathrm{Num}_2(\mathtt{1}^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 5.3 (1 + 6 = 7 Punkte)

In dieser Aufgabe befassen wir uns mit der Addition von Binärzahlen, die wir formalisieren wollen. Dabei bildet der Operator $\oplus_n^c\colon Z_2^n \times Z_2^n \to Z_2^{n+1}$ zwei Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}_0$, die jeweils eine Binärzahl repräsentieren auf ein Wort der Länge $n+1$ ab, das die Summe beider Zahlen repräsentieren soll. Im Superskript wird dabei der Übertrag $c \in Z_2$ aus vorangegangenen Addtionsschritten mitgeführt, so dass sich hinter $\oplus_n^c$ eigentlich zwei Operationen $\oplus_n^{\mathtt{0}}$ und $\oplus_n^{\mathtt{1}}$ verbergen.

Wir betrachten nun die folgende induktive Definition für die durch $\oplus_n^c$ beschriebenen Funktionen für beliebige $c \in Z_2, n \in \mathbb{N}_0$:

$$\varepsilon \oplus_0^c \varepsilon = c$$
$$\forall v, w \in Z_2^n \; \forall \alpha, \beta \in Z_2 : v\alpha \oplus_{n+1}^c w\beta = (v \oplus_n^{\gamma(\alpha,\beta,c)} w) \cdot \delta(\alpha, \beta, c)$$

Dabei beschreibt

$$\delta\colon Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \to Z_2, (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \mathtt{1}, & \text{wenn } N_{\mathtt{1}}(xyz) \in \{1,3\} \\ \mathtt{0}, & \text{wenn } N_{\mathtt{1}}(xyz) \in \{0,2\} \end{cases}$$

die binäre Ergebnisziffer der niedrigsten Stelle, die aus Addition der drei Argumente hervorgeht, während der binäre Übertrag in die nächste Stelle durch die Funktion

$$\gamma\colon Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \to Z_2, (x,y,z) \mapsto \begin{cases} \mathtt{1}, & \text{wenn } N_{\mathtt{1}}(xyz) > 1 \\ \mathtt{0}, & \text{wenn } N_{\mathtt{1}}(xyz) \leq 1 \end{cases}$$

berechnet wird.

a) Berechnen Sie $\mathtt{0110} \oplus_n^{\mathtt{1}} \mathtt{1101}$ schrittweise
b) Wir wollen nun die Kommutativität von $\oplus_n^{\mathtt{0}}$ beweisen. Dabei gehen wir strukturiert vor. Zeigen Sie zuerst die beiden folgenden hilfreichen Lemmata:
   i) $\forall x, y, z \in Z_2 : \delta(x,y,z) = \delta(y,x,z)$
   (d.h., δ ist kommutativ in den ersten beiden Argumenten).
   ii) $\forall x, y, z \in Z_2 : \gamma(x,y,z) = \gamma(y,x,z)$
   (d.h. γ ist kommutativ in den ersten beiden Argumenten).

   Der Beweis der Kommutativität von $\oplus_n^{\mathtt{0}}$ hängt auch von der Kommutativität von $\oplus_n^{\mathtt{1}}$ ab. Daher wollen wir eine stärkere Behauptung beweisen, die auch die Kommutativität von $\oplus_n^{\mathtt{0}}$ impliziert.

   iii) Beweisen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall c \in Z_2, \forall w, v \in Z_2^n : w \oplus_n^c v = v \oplus_n^c w$. Verwenden Sie dazu vollständige Induktion über die Wortlänge $|w| = |v| = n$.