Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 2

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe:	Freitag, 04.11.2022, 12:00 Uhr
Abgabe:	Freitag, 11.11.2022, 12:30 Uhr Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter “Tutorien” im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 2:	/ 21	Blätter 1 – 2, Stud. 1:	/ 42
		Blätter 1 – 2, Stud. 2:	/ 42

Allgemeine Änderung: Zur besseren Unterscheidung der Symbole $Z_2 = \{0,1\}$ der Bitfolgen von den Zahlen $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ als die wir sie interpretieren, wurde die Schreibweise Z_2 im Unterschied zu $\mathbb{Z}_2$ eingeführt.

Aufgabe 2.1 (2 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte)
Gegeben ist die zweistellige Funktion

$$\boxdot\colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, \quad (e,d) \mapsto e \cdot d + 1$$

auf den natürlichen Zahlen, die Sie als Operator in Infix-Notation (also $e \boxdot d$ statt $\boxdot(e,d)$) schreiben können.

a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie ~~für alle $n \in \mathbb{N}_+$~~:

   I) $\boxdot$ ist kommutativ.

   II) $\boxdot$ ist assoziativ.

Bezeichne im Folgenden $Z_2 = \{0,1\}$. Die Menge ${Z_2}^n$ ist demnach die Menge der Bitfolgen der Länge $n \in \mathbb{N}_+$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ ist der Operator $\oslash_n$ (wieder in Infixnotation notierbar) folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \oslash_n\colon {Z_2}^n \times {Z_2}^n &\to {Z_2}^n, \\ (v,w) &\mapsto z \end{aligned}$$

$$\text{mit } z(i) = 1 \text{ gdw. } w(i) = 1 \text{ und } v(i) = 1 \text{ für } 0 \le i < n.$$

b) Zählen Sie alle Wörter $w \in {Z_2}^3$ auf, bei denen in $w \oslash_3 001$ genau eine 1 vorkommt.

c) Geben Sie die Mächtigkeit der Menge $\{x \in {Z_2}^n \mid x \oslash_n 0^{n-1}1 \neq 0^n\}$ in Abhängigkeit von $n > 1$ an.

d) Zeigen Sie oder widerlegen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_+$:

   I $\oslash_n$ ist kommutativ.

   II $\oslash_n$ ist assoziativ.

Aufgabe 2.2 (0,5 + 1 + 2,5 + 1 + 1 = 6 Punkte)
Sei ${Z_2}^n$ wieder die Menge der Bitfolgen der Länge $n \in \mathbb{N}_+$. Außerdem bezeichne im Folgenden $\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N}_0 \mid k < n\}$ die Menge der natürlichen Zahlen (echt) kleiner als $n \in \mathbb{N}_0$. Sei C eine nichtleere endliche Menge mit $|C| = n \in \mathbb{N}_+$. Eine bijektive Funktion $a\colon \mathbb{Z}_n \to C$ zählt die Elemente in C auf. Für eine gegebene solche Aufzählfunktion a übersetzt die Funktion τ_a die Elemente aus C auf Bitfolgen der Länge n vermittels

$$\tau_a\colon C \to {Z_2}^n,\ x \mapsto z$$

$$\text{mit } z(i) = 1 \text{ gdw. } a(i) = x \text{ für } 0 \le i < n.$$

a) Seien $C = \{0,1,2\}$ und die Aufzählfunktion $a : \mathbb{Z}_3 \to C$ mit $a(x) = x$ gegeben. Geben Sie $\tau_a(0)$, $\tau_a(1)$, und $\tau_a(2)$ an.

b) τ_a ordnet jedem Element aus C eine Bitfolge zu. Verallgemeinern Sie dieses Prinzip zu einer Funktion $T_a : 2^C \to {Z_2}^n$, die jeder Teilmenge X von C die Bitfolge $T_a(X)$ zuordnet, in dem genau die Indizes i zu 1 auswerten, deren über a erreichte Elemente in X enthalten sind. Das Wort $T_a(X)$ repräsentiert also gewissermaßen X als (charakteristische) Bitfolge.
Geben Sie eine Funktionsdefinition von T_a an. (**Hinweis:** Sie können sich an der Definition von τ_a orientieren.)

c) Zeigen Sie: T_a ist bijektiv.

d) Seien a und a' zwei verschiedene Aufzählungen von C und $n \geq 2$ (Elemente in andere Reihenfolge). Zeigen oder widerlegen Sie:

$$X = \emptyset \text{ oder } X = C \quad \text{gdw.} \quad T_a(X) = T_{a'}(X) \tag{1}$$

e) Geben Sie einen Operator $\varovee\colon \mathbb{Z}_2{}^n \times \mathbb{Z}_2{}^n \to \mathbb{Z}_2{}^n$ an mit folgenden Eigenschaften:

$$T_a(A) \varovee T_a(B) = T_a(A \cup B) \quad \text{für alle } A, B \subseteq C$$

Hinweis: Der Operator $\varovee$ soll also das Prinzip der Mengenvereinigung auf die Bitfolgen, die endliche Mengen charakterisieren, verallgemeinern. Welche sind nun die Indizes, an denen eine 1 stehen muss?

Aufgabe 2.3 (3 + 3 = 6 Punkte)

Seien $a, b, c \in M$ beliebig und $F : 2^M \to B$ eine injektive Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$F(X) \boxdot F(Y) = F(X \cup Y) \tag{2}$$
$$F(X) \diamond F(Y) = F(X \cap Y)\ . \tag{3}$$

Wir wollen Beziehungen der Form $a \Box b \bigcirc a \Box c$ betrachten, wobei $\Box \in \{=, \neq\}, \bigcirc \in \{\text{und}, \text{oder}\}$. Welche dieser Beziehungen für a, b, c folgen aus den Gleichungen und Ungleichungen über F? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

a) I) $F(\{a\}) \neq F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$

II) $F(\{a\}) = F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})$

b) I) $F(\{a\}) = (F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})) \diamond F(\{a\})$

II) $F(\{a\}) \neq (F(\{b\}) \boxdot F(\{c\})) \diamond F(\{a\})$

Aufgabe 2.4 (1 + 2 = 3 Punkte)

Sei M eine endliche Menge mit $|M| = m \geq 2$. Wir wollen einen Blick auf die Menge B_M der binären Operationen auf M werfen, also $B_M = M^{M \times M}$.

a) Geben Sie die Zahl der binären Operationen auf M an, also $|B_M|$. Eine Begründung ist nicht notwendig.

b) Geben Sie die Zahl der kommutativen Operationen auf M an, also

$$|\{f : M \times M \to M \mid f \text{ ist kommutativ.}\}|\ .$$

Hier reicht eine informelle Begründung.