Grundbegriffe der Informatik — Aufgabenblatt 1
Lösungsvorschläge

Tutorium Nr.:		Tutor*in:	

Matr.nr. 1:			
Nach-,Vorname 1:		,	
Matr.nr. 2:			
Nach-,Vorname 2:		,	

Ausgabe:	Freitag, 28.10.2022, 12:00 Uhr
Abgabe:	Freitag, 04.11.2022, 12:30 Uhr Online, oder in einem Briefkasten mit der Aufschrift GBI im UG des Info-Gebäudes (50.34)

Lösungen werden nur korrigiert, wenn sie

- handschriftlich erstellt sind (Tablet-Ausdruck erlaubt) und
- mit dieser Seite als Deckblatt
- in der oberen **linken** Ecke zusammengeheftet

rechtzeitig abgegeben werden.

Abgaberegeln für Teilnehmer der Tutorien mit Online-Abgabe:

- handschriftlich erstellt (Scans und lesbare Fotos akzeptiert)
- **rechtzeitig**, mit diesem Deckblatt in **genau einer** PDF-Datei
- in ILIAS unter “Tutorien” im Ordner des richtigen Tutoriums abgeben.

---

*Von Tutor*in auszufüllen:* erreichte Punkte

Blatt 1:	/ 21	Blätter 1 – 1, Stud. 1:	/ 21
		Blätter 1 – 1, Stud. 2:	/ 21

Aufgabe 1.1 **(2 + 2 + 1 + 1 = 6 Punkte)**
Seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $A \cup B = A$ genau dann, wenn $B \subseteq A$.
b) Wenn $C \in (2^A \cap 2^B)$, dann $C \subseteq A$.
c) Wenn $|B| \geq 2$, dann $|A \times B| \geq |B|$.
d) Für digitalen Signale bildet die Menge $\{0, 1\}$ ein Alphabet und für analoge Signale ist die Menge aller möglichen Spannungen zwischen 0V und 5V ein Alphabet.

Lösung 1.1

a) Die Aussage ist wahr. Der Beweis erfolgt getrennt für die beiden Implikationsrichtungen von „genau dann wenn“:
   - Wir beginnen mit der „$\Rightarrow$“-Richtung:
     Sei $A \cup B = A$. Für ein beliebiges $x \in B$ gilt auch $x \in (A \cup B)$ per Definition von $\cup$. Aus $A \cup B = A$ folgt dann direkt $x \in A$. Da $x \in B$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus $B \subseteq A$.
   - Nun die „$\Leftarrow$“-Richtung:
     Sei (*) $B \subseteq A$. Für ein beliebiges $x \in A \cup B$ gilt, dass $x \in A$ oder $x \in B$. Letzteres impliziert wegen der Teilmengenbeziehung (*) auch, dass $x \in A$ ist. Es ist also $A \cup B \subseteq A$. Die Aussage $A \subseteq A \cup B$ folgt direkt aus der Definition von $\cup$. Die beiden Teilmengenbeziehungen zeigen insgesamt also, dass $A \cup B = A$.

b) Die Aussage ist wahr.

$$\begin{aligned} & C \in (2^A \cap 2^B) \\ \text{gdw.} \quad & C \in 2^A \text{ und } C \in 2^B \\ \Rightarrow \quad & C \in 2^A \qquad (*) \\ \text{gdw.} \quad & C \subseteq A \text{ (Def. der Potenzmenge)} \end{aligned}$$

(*) Wenn $C \in 2^A$ und $C \in 2^B$, dann $C \in 2^A$. Die Gegenrichtung wird nicht impliziert. Es gibt **keine** „genau dann, wenn“-Beziehung.

c) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: Seien $A = \emptyset$ und $B = \{1, 2, 3\}$, dann gilt $|A \times B| = |\emptyset| = 0 < 3 = |B|$.

d) Die Aussage ist falsch, denn die Menge $\{v \in \mathbb{R} \mid 0 \leq v \leq 5\}$ ist nicht endlich. Jedes Alphabet muss aber endlich sein.

Aufgabe 1.2 **(1 + 1 + 1 + 1 = 4 Punkte)**
Sei $R = \{(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}_+ \setminus \{1\})^2 \mid \alpha \neq \beta \text{ und } \exists n \in \mathbb{N}_+ : n\beta = \alpha\}$ eine Relation. Welche der folgenden Eigenschaften hat R? Zeigen oder widerlegen Sie:

a) linkstotal
b) linkseindeutig
c) rechtstotal
d) rechtseindeutig

Lösung 1.2

a) R ist nicht linkstotal. Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$ gilt für alle $b \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\}$, die von p verschieden sind, dass $nb \neq p$ für alle $n \in \mathbb{N}_+$. (p hat keine Teiler außer 1 und p.) Daraus folgt für alle $b \in \mathbb{N}_+ : (p, b) \notin R$.

(Als Antwort auf diese Frage genügt es natürlich auch, dies für eine konkrete Primzahl zu zeigen.)

b) R ist nicht linkseindeutig, denn $\{(4,2),(8,2)\} \subseteq R$.
c) R ist rechtstotal, denn $\forall \beta \in \mathbb{N}_+ \setminus \{1\} : (2\beta, \beta) \in R$.
d) R ist nicht rechtseindeutig, denn $\{(8,4),(8,2)\} \subseteq R$.

Aufgabe 1.3 (2 + 1 + 1 = 4 Punkte)
Seien $n, m \in \mathbb{N}_+$ und $\mathbb{N}_\alpha = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x < \alpha\}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_+$.

a) Konstruieren Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ mit allen folgenden Eigenschaften:
   - Wenn $|\mathbb{N}_n| < |\mathbb{N}_m|$, dann ist f injektiv.
   - Wenn $|\mathbb{N}_n| > |\mathbb{N}_m|$, dann ist f surjektiv.
   - Wenn $|\mathbb{N}_n| = |\mathbb{N}_m|$, dann ist f bijektiv.
b) Beweisen Sie, dass f injektiv ist, wenn $n < m$.
c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für n und m an, bei der f surjektiv ist.

Lösung 1.3

a)
$$f\colon \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m, x \mapsto \begin{cases} x, & \text{wenn } x < m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Wenn $n < m$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{N}_n : f(x) = x$, da immer $x < m$ gilt. Es gilt also $f = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{N}_n\}$ und diese Relation ist linkseindeutig und f damit injektiv.
c) $n \geq m$

Aufgabe 1.4 (2 + 2 = 4 Punkte)
Anmerkung: Für diese Aufgabe werden keine formalen Beweise verlangt!
Sei $R \subseteq A \times B$ eine Relation. Ziel in dieser Aufgabe ist es, R als eine Funktion f_R in einen anderen Zielbereich zu interpretieren, in dem Sinne dass $(a,b) \in R$ genau dann, wenn $b \in f_R(a)$ gilt (für alle $a \in A$, $b \in B$).

a) Geben Sie den Zielwertbereich C_R der Funktion $f_R : A \to C_R$ an und geben Sie eine Definition von f_R an.
b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für R an, dass f injektiv ist.

Lösung 1.4

a) $C = 2^B$ und $f\colon A \to 2^B, \alpha \mapsto \{b \mid (\alpha, b) \in R\}$
   Anmerkung: Eine Funktion, die auf Mengen im Zielbereich abbildet, nennt man auch *mengenwertige Funktion*. f ist also die Relation R interpretiert als mengenwertige Funktion mit Funktionswerten in 2^B.
b) Für alle Paare a_1, a_2 aus A, muss es ein $b \in B$ geben, sodass $(a_1, b) \in R$ und $(a_2, b) \notin R$ oder umgekehrt.

Aufgabe 1.5 (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)
Sei $B = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq a \leq 8 \text{ und } 1 \leq b \leq 8\}$ die Formalisierung eines Schachbrettes. Das schwarze Feld „a1“ hat die Koordinaten $(1,1)$ und das weiße Feld „b1“ die Koordinaten $(2,1)$.

a) Geben Sie die Menge $R \subseteq B \times B$ an, die genau alle möglichen Springerzüge enthält, ohne diese erschöpfend aufzuzählen.
b) Geben Sie die Menge $S \subseteq B$ aller schwarzen Felder an, ohne diese erschöpfend aufzuzählen.
c) Geben Sie die Menge alle Springerzüge, die auf einem schwarzen Feld starten, als Mengenausdruck an, ohne Klassentermschreibweise ("set comprehension") zu verwenden.

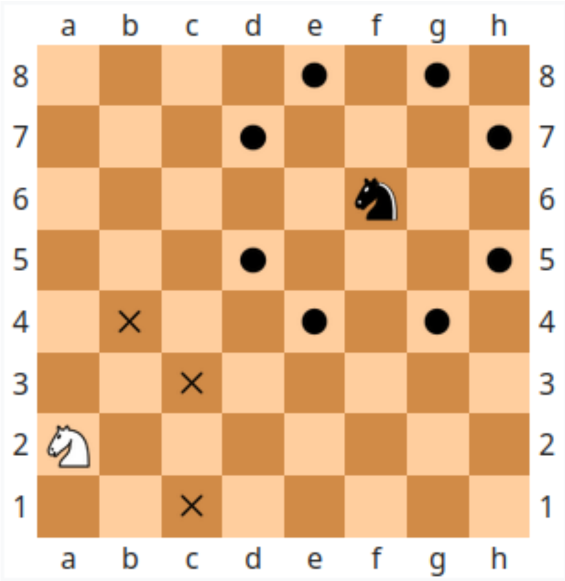

Abbildung 1: Die erlaubten Züge des Springers auf a2 sind mit einem Kreuz, und die des Springers auf f6 mit einem Kreis markiert (Bildquelle: Wikipedia)

Lösung 1.5

a) Die Menge $R = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in B \times B \mid |a_1 - a_2| + |b_1 - b_2| = 3 \wedge (|a_1 - a_2|) \in \{1, 2\}\}$ erfüllt die Bedingung.
b) $S = \{(a, b) \in B \mid a + b \text{ ist gerade}\}$
c) Die Menge aller validen Züge, geschnitten mit der Menge aller Züge, die von einem schwarzen Feld aus starten, also $R \cap (S \times B)$, bildet die gewünschte Menge.