Karlsruher Institut für Technologie

Klausur Grundbegriffe der Informatik
WS 2021/2022

07. März 2022

Name:	
Matrikelnummer:	

Beachten Sie:

- Schreiben Sie Ihren vollständigen **Namen** und **Matrikelnummer** in Druckschrift in das Feld auf dem Deckblatt!
- Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Bei Bedarf können Sie weiteres Papier anfordern.
- Wir akzeptieren auch englische Antworten.
- Sie haben **120 Minuten** Bearbeitungszeit.
- Die Klausur umfasst 22 Seiten (11 Blätter) mit 7 Aufgaben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	**Gesamt**
Erreichte Punkte								
Erreichbare Punkte	9	10	7	6	10	6	12	**60**

Note

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen (9 Punkte)

a) Begründen oder widerlegen Sie: für Mengen A, B und C gilt: **(1 Punkt)**

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \ .$$

b) Eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ sei induktiv definiert durch $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ und $f(n+1) = 2 \cdot f(n) + f(n-1)$ für $n \geq 1$. Geben Sie $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ an. Geben Sie außerdem $f(n+2)$ als Ausdruck unter Verwendung von $f(n)$ und $f(n-1)$ an. **(2 Punkte)**

$f(2) = \boxed{}$ $f(3) = \boxed{}$ $f(4) = \boxed{}$

$f(n+2) = \boxed{}$

Matrikelnummer: ____________________

c) Seien P, Q und R aussagenlogische Variablen. Geben Sie eine zur Formel

$$(P \to (P \to Q)) \to R$$

äquivalente Formel an, in der nur die Konnektive $\vee$, $\wedge$ und $\neg$ vorkommen, aber keine Implikation $\to$. Geben Sie eine vereinfachte Formel an, sodass jede Variable und jedes Konnektiv nur noch einmal vorkommt. **(1 Punkt)**

d) Ordnen Sie die folgenden Funktionen so an, dass $f \in O(g)$ genau dann, wenn f links von g eingeordnet ist. **(2 Punkte)**

$$2^n, \quad 10^{100}, \quad 3^{n/2}, \quad n \log n, \quad n^5, \quad n \log \log n$$

e) Geben Sie die Anzahl der Knoten und Kanten an, die der *ungerichtete* Graph mit der folgenden Adjazenzmatrix besitzt: **(1 Punkt)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Anzahl Knoten:

Anzahl Kanten:

f) Beweisen oder widerlegen Sie: Wenn eine Relation $R \subseteq M \times M$ nicht symmetrisch ist, ist sie antisymmetrisch. **(2 Punkte)**

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 2: Homorphismen (10 Punkte)

Seien die Alphabete $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ und $B = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ gegeben. Sei ferner $h : A^* \to B^*$ ein Homomorphismus mit $h(\mathtt{a}) = \mathtt{01}$, $h(\mathtt{b}) = \mathtt{010}$ und $h(\mathtt{c}) = \mathtt{1}$.

a) Geben Sie $h(\mathtt{abc})$ und $h(\mathtt{caa})$ an. **(1 Punkt)**

$h(\mathtt{abc}) =$

$h(\mathtt{caa}) =$

b) Zeigen Sie, dass h nicht injektiv ist. **(1 Punkt)**

c) Wir wollen nun eingehender untersuchen, für welche Wortmengen $\{u, w\}$ mit $u \neq w$ die Eigenschaft $h(u) = h(w)$ gilt. Geben Sie in einem ersten Schritt zwei notwendige Kriterien basierend auf Wortlängen oder Anzahl der vorkommenden Zeichen an, damit diese Eigenschaft gilt. In den von Ihnen angegebenen Kriterien soll h nicht explizit vorkommen. **(2 Punkte)**

d) Geben Sie nun alle Wortmengen $\{u, w\}$ mit $u \neq w$, $|u| \leq 4$ und $|w| \leq 4$ an, für die $h(u) = h(w)$ gilt. **(3 Punkte)**

e) Durch den Homomorphismus h wird eine Äquivalenzrelation $\equiv_h$ auf A^* induziert:

$$\forall u, w \in A^* \;:\; u \equiv_h w \;\leftrightarrow\; h(u) = h(w) \;.$$

Wir betrachten nun die Faktormenge $A^*/_{\equiv_h}$ (d.h. die Menge aller Äquivalenzklassen).
Zeigen Sie: **(3 Punkte)**
(1) Es gibt unendlich viele verschiedene Äquivalenzklassen $[w]_{\equiv_h} \in A^*/_{\equiv_h}$.
(2) Es gibt keine Äquivalenzklasse mit unendlich vielen Elementen.

Aufgabe 3: Huffman-Codierung (7 Punkte)

a) Erstellen Sie einen Huffman-Baum für das Wort $w = \mathtt{b}^2\mathtt{d}^4\mathtt{c}^4\mathtt{a}^2\mathtt{d}^4$ über dem Alphabet $A = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}, \mathtt{d}\}$ und geben Sie die daraus resultierende Codierung von w an. **(2 Punkte)**

b) Wir wollen nun ein Wort w über einem beliebigen Alphabet A mit mindestens zwei Symbolen betrachten, dessen Länge eine Zweierpotenz ist, d.h. $|w| = n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_+$, und zu dem wir das Folgende wissen: Jedes Zeichen $a \in A$ kommt in dem Wort mit der Häufigkeit einer Zweierpotenz vor, d.h., es gilt für alle $a \in A$ gibt es ein $j_a \in \mathbb{N}_0$ mit $N_a(w) = 2^{j_a}$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass unter diesen Annahmen die Huffman-Codierung $H(a)$ eines Zeichens $a \in A$ mit Häufigkeit 2^{j_a} genau Länge $k - j_a$ hat. **(5 Punkte)**

Hinweis: Unter den gemachten Annahmen gibt es mindestens zwei Zeichen gleicher geringster Häufigkeit in w. Sie dürfen die Korrektheit dieser Aussage in Ihrem Beweis annehmen.

i) Beweisen Sie die Aussage für ein Alphabet A mit zwei Zeichen, d.h. $|A| = 2$. (1 Punkt)

ii) Beweisen Sie die Aussage für den allgemeinen Fall. (4 Punkte)

Hinweis: Eine Möglichkeit des Beweises ist per Induktion über die Mächtigkeit $m = |A|$ des Alphabets.

Aufgabe 4: Logik (6 Punkte)

a) Gegeben seien die drei aussagenlogischen Variablen P, Q und R. **(2 Punkte)**

   i) Geben sie eine aussagenlogische Formel an, welche eine Tautologie ist und P und Q enthält.

   ii) Ist die aussagenlogische Formel $(P \to Q) \vee (Q \to R)$ eine Tautologie? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Die Studierenden Arthur, Bertha und Celina gehen manchmal in die Mensa um ihren Hunger zu stillen.

   (a) Die Variable A bedeutet, Arthur ist in der Mensa.

   (b) Die Variable B bedeutet, Bertha ist in der Mensa.

   (c) Die Variable C bedeutet, Celina ist in der Mensa.

   Drücken Sie folgende Aussagen als aussagenlogische Formeln mit den Variablen A, B und C aus. **(2 Punkte)**

   i) Es sind genau zwei der drei Studierenden in der Mensa.

ii) Arthur ist nur in der Mensa, wenn Bertha und Celina nicht in der Mensa sind.

c) Ist die nachfolgende Formel erfüllbar? Begründen Sie Ihre Antwort entweder durch eine Wahrheitstabelle, Umformung oder durch ein Modell. **(2 Punkte)**

$$(A \to B) \land (B \to C) \land (C \to A) \land (A \lor B \lor C) \land (\neg A \lor \neg B \lor C)$$

Aufgabe 5: Grammatiken (10 Punkte)

Gegeben seien die formalen Sprachen L_1, L_2 über dem Alphabet $\{a, b, c\}$:

$$L_1 = \{a^n b^m c^n \in \{a, b, c\}^* \mid n, m \in \mathbb{N}_0\}$$

$$L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (N_a(w) + N_b(w)) \bmod 3 = 0\}$$

a) Geben Sie die kleinste Anzahl an Nichtterminalsymbolen an, welche eine kontextfreie Grammatik G_1 mit $L(G_1) = L_1$ enthalten muss. Begründen Sie. **(1 Punkt)**

b) Gibt es einen regulären Ausdruck R so, dass $L_2 = \langle R \rangle$? Falls ja, geben Sie R an. Falls nicht, begründen Sie kurz, warum das nicht der Fall sein kann. **(1 Punkt)**

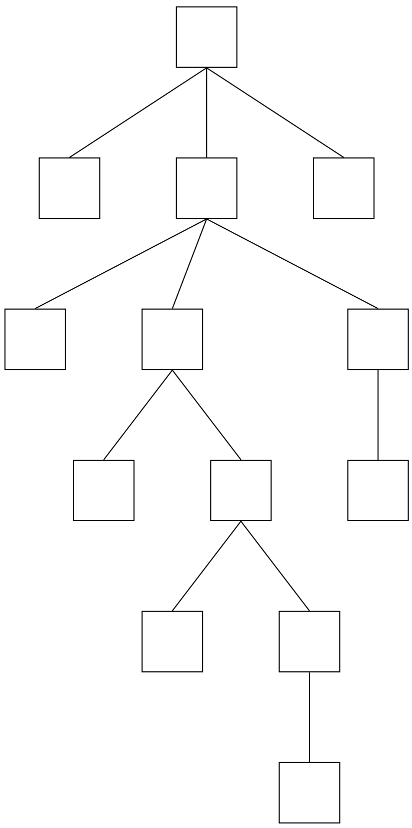
c) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_2 so an, dass $L(G_2) = L_1 \cap L_2$. Verwenden Sie höchstens 4 Nichtterminalsymbole.**(3 Punkte)**

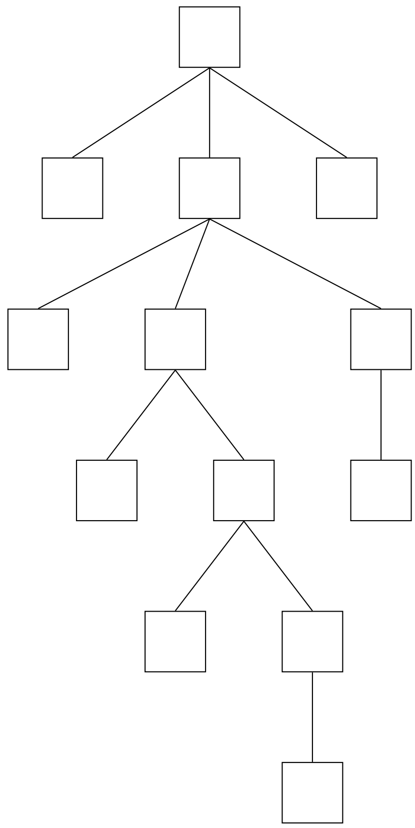
d) Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = (N, T, S, P)$ mit

$$
\begin{aligned}
N =& \{S, A, B, C, R\} \\
T =& \{a, b, c\} \\
P =& \{S \to aSa \mid bSb \mid cSc \mid aRA \mid bRB \mid cRC \\
& \quad R \to aR \mid bR \mid cR \mid \varepsilon \\
& \quad A \to b \mid c \\
& \quad B \to a \mid c \\
& \quad C \to a \mid b \\
& \}
\end{aligned}
$$

i) Unten finden Sie die Struktur eines Ableitungsbaumes. Füllen Sie diese so aus, dass sich ein gültiger Ableitungsbaum zu einem Wort aus $L(G)$ ergibt. Geben Sie das von Ihnen gewählte Wort an. **(2 Punkte)**

Wort: ______________________





Hinweis: Sie können den zweiten Baum für Nebenrechnungen verwenden. Wenn Sie beide Bäume verwenden, machen Sie unbedingt deutlich, welcher Baum Ihre Lösung enthält und gewertet werden soll.

ii) Geben Sie $L(G)$ explizit als Mengenausdruck an. **(1 Punkt)**

iii) Geben Sie eine bijektive Funktion $f : \{a, b, c\}^+ \to \{a, b, c\}^+$ an, sodass gilt:

$$\forall w \in \{a, b, c\}^+ : f(w) \in L(G) \Leftrightarrow w \in L(G) \enspace .$$

f darf dabei nicht die Identitätsfunktion sein. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Funktion. **(2 Punkte)**

Aufgabe 6: Automaten und reguläre Ausdrücke (6 Punkte)

Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die beiden regulären Sprachen

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ kommt in } w \text{ vor}\}$
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ kommt nicht in } w \text{ vor}\}$

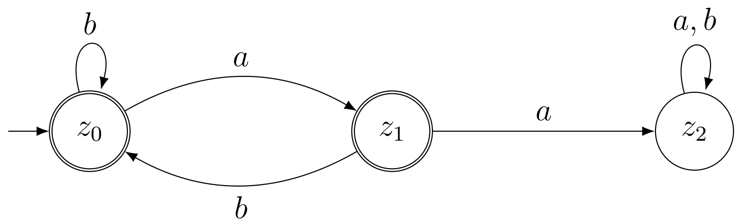
a) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A = (Z, z_0, f, F)$ mit $|Z| \leq 4$ an, der L_1 akzeptiert. **(1 Punkt)**

b) Geben Sie einen endlichen Akzeptor $A' = (Z', z_0', f', F')$ mit $|Z'| \leq 4$ an, der L_2 akzeptiert. **(1 Punkt)**

Matrikelnummer: ______________________

c) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der L_1 beschreibt. **(1 Punkt)**

d) Gegeben sei der unten aufgeführte Automat über dem Eingabealphabet $\{a, b\}$. Geben Sie einen regulären Ausdruck an, welcher die vom Automaten akzeptierte Sprache beschreibt. **(3 Punkte)**



Aufgabe 7: Turingmaschinen (12 Punkte)

a) Entwerfen Sie einen TM-Aktzeptor A mit Bandalphabet $X = \{a, b, c, \$, \square\}$, der die Sprache $L_{abc} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ akzeptiert. **(5 Punkte)**

i) Geben Sie zuerst in 1-2 Sätzen eine Idee für die Funktionsweise einer solchen Turingmaschine an. (1 Punkt)

ii) Geben Sie nun eine Turingmaschine an. Nutzen Sie hierfür die vorgegebenen Zustände. Sie müssen nicht alle Zustände nutzen. Verwenden Sie die Notationen aus der Vorlesung und markieren Sie akzeptierende Zustände. (4 Punkte)

Sie können die unten angegebene Zustandsmenge als Alternativlösung verwenden. Falls Sie dies tun, kennzeichnen Sie eindeutig, welche Lösung gewertet werden soll!

b) Wie müssten Sie Ihre Turingmaschine aus ii) verändern, wenn das Eingabealphabet um einen weiteren Buchstaben d erweitert wird und die Sprache

$$L_{abc}^{d} = \{d^v\ a^n\ d^x\ b^n\ d^y\ c^n\ d^z \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge v, x, y, z \in \mathbb{N}_0\}$$

akzeptiert werden soll. Beschreiben und begründen Sie Ihr Vorgehen in wenigen Sätzen. Zeichnen Sie keine neue Turingmaschine. **(1 Punkt)**

c) Sind die folgenden Aussagen bzgl. Turingmaschinen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz. Ohne richtige Begründungen gibt es keine Punkte. **(2 Punkte)**

i) Für jeden TM-Akzeptor A gibt es einen TM-Akzeptor A' mit $L(A') = X^* \setminus L(A)$. (1 Punkt)

ii) Jede Turingmaschine, welche durch ein endlich langes Codewort beschrieben werden kann, kann auch nur endlich viele Wörter akzeptieren. (1 Punkt)

d) Eine Rechts-Turingmaschine T_r kann auf dem Arbeitsband in jedem Schritt nur nach rechts gehen, also nicht stehen bleiben oder nach links gehen. Die partielle Bewegungsfunktion m_r ist also definiert durch $m_r(z, x) = R$ für alle $x \in X$ und alle $z \in Z$. Weiterhin ist die Zustandsübergangsfunktion für das $\square$-Symbol bei Turingmaschinen T_r nicht definiert. Ein Rechts-TM-Akzeptor ist ein Akzeptor basierend auf einer Rechts-Turingmaschine.

Zeigen Sie, dass Rechts-TM-Akzeptoren genauso mächtig sind wie endliche Akzeptoren. Genauso mächtig heißt hier, dass Sie die gleiche Menge an Sprachen entscheiden können. **(4 Punkte)**